



PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XVII



Palchetto

Num. d'ordine

22 42 615

NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

1291

NAPOLI

63-641

II

1291

610519.

ISTITUZIONI ANALITICHE

AD USO

DELLA GIOVENTU' ITALIANA

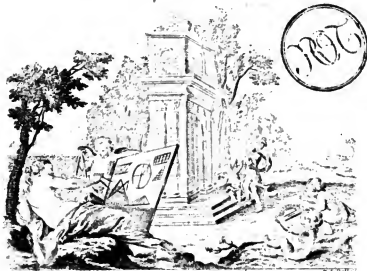
DI D.^{NA} MARIA GAETANA

A G N E S I

MILANESE

Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.

TOMO II.



IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.



ISTITUZIONI ANALITICHE

LIBRO SECONDO

Del Calcolo Differenziale.



L'Analisi delle quantità infinitamente piccole, che in altro modo Calcolo Differenziale, o Calcolo delle Flussioni suole chiamarsi; è quella, che versa intorno alle differenze delle quantità variabili, di qualunque ordine sieno esse differenze. Questo calcolo contiene i Merodi delle Tangenti; de' Massimi, e Minimi; de' Flessi contrarj, e Regressi delle Curve; de' Raggi Osculatori ec., e però dividendo in più Capi tutta la Materia sia.

Manuscript notes in cursive script, including the name 'Benedetto' and other illegible text.

C A P O I.

*Dell' Idea de' Differenziali di diversi ordini,
e del Calcolo de' medesimi.*

1. **C**OL nome di quantità variabili si vogliono significare quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento, e si concepiscono come fluenti, e per così dire, generate da un moto continuo.

S'intenda (*Fig. 1.*) la retta ABC , generata dal moto del punto A , prodotta in infinito, sopra cui insista, facendo un qualunque angolo, l'altra retta BD , e suppongasi, che mentre il punto B giugne da B in C , seco portando la linea BD sempre a se stessa parallela da BD in CE , il punto D trascorra lo spazio FE con tal legge, che descriva la curva ADE ; egli è chiaro, che l'assisse AB , AC , siccome l'ordinate BD , CE , e gl'archi AD , AE faranno quantità continuamente crescenti, e decrescenti, e però variabili.

2. Quantità costanti sono quelle, che nè crescono, nè calano, ma si concepiscono per determinate, ed invariabili, come i Parametri, gl' Assi, o Diametri ec.

Le costanti si denominano colle prime lettere dell'Alfa-

Alfabeto , e le variabili colle ultime in quella guisa , che si è fatto nell' Algebra Cartesiana rispetto alle quantità note , ed incognite .

3. Si chiama differenza , o flussione di una quantità variabile quella porzione infinitesima , cioè tanto piccola , che ad essa variabile abbia proporzione minore di qualunque data , e per cui crescendo , o diminuendosi la medesima variabile , possa ciò non ostante assumersi per la stessa di prima .

Sia (Fig. 2. , e 3.) la curva AM , il di cui asse , o diametro AP ; e si prenda nella AP prodotta una porzione infinitesima Pp , sarà essa la differenza , o sia la flussione dell' asse AP , e si potranno considerare per eguali le due AP , Ap , non essendovi proporzione tra la quantità finita AP , e la porzione infinitesima Pp . Da' punti P , p si alzino le due ordinate parallele PM , pm in qualunque angolo , e si tiri la corda mM prodotta in B , e la retta MR parallela ad AP ; poichè sono simili i due triangoli BPM , MRm , sarà BP , $PM :: MR$, Rm , ma le due quantità BP , PM sono finite , ed MR è infinitesima , adunque sarà pure infinitesima la Rm , e però sarà essa la differenza dell' ordinata PM ; per la stessa ragione sarà infinitamente piccola la corda Mm , ma (come dimostrerò in appresso) la corda Mm non si distingue dall' archetto , e si può prendere indifferentemente l' uno per l' altra ,
adun-

adunque sarà l'archetto Mm quantità infinitesima, e però la differenza dell'arco AM della curva. Da ciò chiaramente si vede, che anco lo spazio $PMmp$, chiuso dalle due ordinate PM , pm , dalla infinitesima Pp , e dall'archetto infinitesimo Mm , sarà la differenza dell'area AMP compresa fra le due coordinate AP , PM , e la curva AM ; e condotte le due corde AM , Am , sarà il triangolo mistilineo MAm la differenza del segmento AMS chiuso dalla corda AM , e dalla curva ASM .

4. La Caratteristica, con cui soglionsi esprimere le differenze, è la lettera d , quindi posta l'assissa $AP=x$, sarà Pp , o $MR=dx$; e similmente posta l'ordinata $PM=y$, sarà $Rm=dy$, e posto l'arco di curva $ASM=s$, lo spazio $APMS=t$, il segmento $AMS=u$, sarà $Mm=ds$, $PMmp=dt$, $AMm=du$, e tutte queste sono differenze prime, o flussioni del primo ordine.

E si avverta, che le predette differenze si scrivono col segno positivo, se per esse crescano le variabili loro, e col negativo se le variabili calino. Così nella curva NEC (Fig. 4.) essendo $AB=x$, $BF=dx$, $BC=y$, sarà $DC=-dy$, differenza negativa della y .

Che queste tali quantità differenziali non sieno vane immaginazioni, oltre di che egli è manifesto dal metodo degl' Antich' de' Poligoni inscritti, e circoscritti,

scritti, si può chiaramente vedere dal solo idearsi, che l'ordinata MN (Fig. 4.) si vada continuamente accostando alla BC , finchè con essa coincida; ora egli è chiaro, che prima, che queste due linee coincidano, averanno tra loro una distanza, ed una differenza inassegnabile, cioè minore di qualunque quantità data; in tale posizione sieno BC , FE , adunque BF , CD saranno quantità minori di qualunque data, e però inassegnabili, o sia differenze, o flussioni.

Anzi con la sola comun Geometria è sicuro, che non solo queste, ma altre quantità minime di classi infinite entrano realmente a formare l'estensione geometrica. Si danno in geometria le quantità incommensurabili, ed infinite di genere, come è noto a' Geometri, ed agl' Analisti, dunque si danno le grandezze infinitesime di varj ordini.

Ed in fatti sia a cagion d'esempio (Fig. 5.) AB il lato, ed AC il diametro d'un quadrato, le quali due linee per l'ultima proposizione del libro 10. di Euclide sono fra loro asimmetre, vale a dire incommensurabili. Dico pertanto: che non sono esse rese tali da una qual si sia finita lineetta CE , per quanto piccola essa si prenda, ma bensì da un'altra infinitamente minore, cioè della classe delle infinitesime.

Fingasi, che la linea EC finita renda, s'egli è possibile, le due AB , AC asimmetre; in conseguenza
la

la restante AE sarà commensurabile al lato AB . Sia la retta F comune loro misura, la quale non può mai essere eguale alla EC , altrimenti sarebbero commensurabili il lato, ed il diametro; sarà adunque, o maggiore, o minore.

Nel primo caso si sottragga F da EC , quante volte si può, ed il residuo sia GC . E perchè F misura AB , AE , ed anco EG , le due rette AB , AG avranno fra loro una proporzione razionale, conseguentemente non era la grandezza EC , che facesse incommensurabili le AB , AC , ma una quantità più piccola, per esempio la GC , la quale però è finita, essendosi dalla finita EC sottratta una, o più fiate la finita F . Dividasi F per metà, ed indi ancora per metà sino a tanto, che si venga ad una parte aliquota di F minore di GC , e levata questa da GC , resterà HC , la quale, replicato il discorso, non è quella che rende incommensurabili le linee AB , AC ; ed atteso che il raziocinio vale per qual si sia grandezza finita, si conchiuda, che la incommensurabilità procede da una quantità inassegnabile minore di qualunque data, lo che si verifica parimente nell'altro caso, mentre cioè sia la comune misura F maggiore di EC , il che ec.

Dopo di ciò vado avanti, e dico, che i quadrati sopra le rette AB , AC , i quali si rispondono come l'unità al binario, non ostante, che i lati sieno irrazionali,

zionali, sono però commensurabili, e fatti tali da una quantità infinitesima del secondo ordine. Esposti (Fig. 6.) i due quadrati AB , AC , segno le due quantità eguali, ed infinitesime, che rendono asimmetri i lati AD , AG , AI , AH , e sieno queste ED , FI , e compiuta la preparazione (come nella Figura) si noti, che i due rettangoli DK , IK sono incommensurabili al quadrato AB , e la ragione si è, perchè sono compresi dalle rette EK , FK commensurabili alle due AG , GB , e di più dalle linee minime, ed inassegnabili ED , FI , che sono quelle, dalle quali nasce l'asimmetria de' lati AD , AG , AI , AH . Aggiunto però a' suddetti rettangoli il quadrato AK , avremo il gnomone composto delle tre accennate grandezze, asimmetro al quadrato AB ; ma l'intero quadrato AC sta all'altro AB in razional proporzione, dunque il quadrato AC è reso tale dal quadrato infinitesimo KC , quantità del secondo ordine, per la quale supera il suddetto gnomone asimmetro.

Noto, che i cubi sopra le linee AI , AH sono incommensurabili, tutto che sieno razionali le loro basi, e si può facilmente provare, che sono ridotti tali da una grandezza inassegnabile del terzo ordine, ed in tal guisa col discorso di mano in mano si proceda.

5. In quella guisa che le differenze prime non hanno proporzione assegnabile alle quantità finite, così

le differenze seconde, o flussioni del secondo ordine non hanno proporzione assegnabile alle differenze prime, e sono di esse infinitamente minori per modo, che due quantità infinitesime del primo ordine, ma che differiscono tra loro d'una differenza seconda, possono assumersi per eguali. Lo stesso si dica delle differenze terze rispetto alle seconde, e così di mano in mano.

Le differenze seconde si sogliono marcare con doppia d , le terze con trè d ec. La differenza adunque di dx , cioè la differenza seconda di x si scriverà ddx , o pure d^2x , nel che si avverta, non essere lo stesso d^2x , e dx^2 , perchè il primo significa, come è detto, la differenza seconda di x , ed il secondo significa il quadrato di dx ; la differenza terza sarà $ddd x$, o pure d^3x ec. Così ddy farà la differenza di dy , cioè la differenza seconda di y ec.

Ma per formare giusta idea delle seconde, terze ec. differenze faranno opportuni i seguenti Teoremi.

TEOREMA I.

6. Sia una qualunque curva MBC , (Fig. 7.) ed una porzione di essa BC infinitesima del primo ordine. Da' punti B , C si conducano perpendicolari alla curva le rette BA , CA . Dico: che le rette BA , CA si potranno assumere per eguali.

Si

Si conducano le tangenti BD , CD , e la corda BC . Se le due BA , CA non sono eguali, sia quella, che si vuole di loro, come CA , maggiore dell'altra, e ad essa si conduca perpendicolare la BH . La differenza fra le linee BA , CA sarà minore dell'intercetta CH , per l'angolo retto in H , e CH minore della corda BC , ma la corda BC è infinitesima del primo ordine, essendosi supposto infinitesimo l'arco; adunque la differenza tra BA , e CA almeno non sarà maggiore di una quantità infinitesima del primo ordine, e però le rette BA , CA potranno assumersi per eguali.

COROLLARIO I.

Adunque il triangolo BAC sarà isoscele, e però gl'angoli ABC , ACB alla base eguali tra loro, e sottratti questi da' retti ABD , ACD , rimarranno eguali i due BCD , DBC , e per conseguenza anche eguali le due tangenti BD , CD .

COROLLARIO II.

Condotta la retta DA , essendo simili, ed eguali i due triangoli ADB , ADC , taglierà essa in due parti eguali gl'angoli BAC , BDC ; e perchè vengono pure ad essere simili, ed eguali i due triangoli AEB , AEC , sarà la stessa AD normale a BC , e la dividerà egualmente in E .

B 2 COROL-

COROLLARIO III.

Ed essendo simili i due triangoli DAC, EDC , farà l'angolo DCE eguale all'angolo DAC , ed i due angoli DCE, DBE presi assieme eguali all'angolo BAC .

COROLLARIO IV.

Da ciò si raccoglie, che un' arco qualunque infinitesimo BC di qualsivoglia curva avrà le stesse affezioni, e proprietà dell'arco di circolo descritto col centro A , e raggio AB , o AC .

COROLLARIO V.

Essendo simili i due triangoli AEB, BED , avremo $AE, EB :: EB, ED$; ma AE è linea finita, ed EB infinitesima del primo grado, dunque ED sarà infinitesima del secondo, e farà il suo valore $= \frac{EB^2}{AE}$.

Ma il rettangolo sotto la doppia AE in EI è eguale, (per la proprietà del circolo) al quadrato EB ; dunque $\overline{EB}^2 = 2AE \times EI = AE \times ED$, e per conseguenza $2AE, AE :: ED, EI$; ma il primo termine dell'analogia è doppio del secondo, dunque anco il terzo del

del quarto, e conseguentemente faranno eguali le due linee del secondo ordine IE , ID .

COROLLARIO VI.

E perchè la differenza tra la semicorda BE , e la toccante BD è una quantità minima del terzo grado; conciosiacchè, condotto dal centro B , coll'intervallo BE l'arco di cerchio EL , grandezza della seconda classe, la quale con il suo seno si confonde, faranno simili i due triangoli BDE , EDL , che oltre gl'angoli retti in E , ed L , hanno l'angolo comune in D , dunque BD , $DE :: ED$, DL ; ma BD è flussione prima, e DE seconda (per l'antecedente Corollario) dunque DL farà una terza flussione. Quindi essendo l'arco BI della curva maggiore della semicorda BE , e minore della tangente BD , non può differire dall'una, e dall'altra se non per una grandezza al più del terzo ordine.

TEOREMA II.

7. Sia una qualunque curva DAE , (Fig. 8., e 9.) nel di cui asse prese due porzioni infinitesime del primo ordine, ed eguali HI , IM , si conducano le ordinate parallele HA , IB , ME , le quali taglieranno nella data curva gl'archetti AB , BE parimente infinitesimi del primo ordine. Si conduca la corda ABC , la quale concorra
nel

nel punto C con l'ordinata ME prodotta, se occorre. Dico: che l'intercetta CE tra la curva, e la corda AB prodotta sarà infinitesima del secondo ordine.

Si conduca la corda AE . Se la retta IM fosse quantità assegnabile finita, anco il triangolo ACE sarebbe finito; ma accostandosi sempre alla ordinata HA la ME in maniera, che la IM divenga pure flussione, o sia infinitesima del primo ordine, l'angolo ACE rimane sempre lo stesso, e l'angolo AEC si accresce, facendosi sempre minore l'angolo CAE , fino a che divenga finalmente minore di un qualunque dato, cioè si faccia infinitesimo. In questo caso, siccome il seno di un'angolo infinitesimo del primo ordine col raggio finito assegnabile è quantità infinitesima del primo ordine, così il seno dell'angolo CAE infinitesimo del primo ordine nel raggio AE , o AC infinitesimo del primo ordine, sarà quantità infinitesima del secondo ordine; ma ne' triangoli i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, adunque anche la retta CE sarà infinitesima del secondo ordine.

Chiamate per tanto le $DH = x$, $HA = y$; $HI = IM = dx$, sarà $FB = GC = dy$, ed $EC = -ddy$, prefiggendo il segno negativo, perchè per essa cala, e non cresce la dy , (Fig. 8.) e così all'opposto averà il segno positivo, se per essa cresce la dy , cioè se la curva sia convessa in quel punto all'asse DM . (Fig. 9.)

COROL-

COROLLARIO.

Se dal punto E si conduca alla BC la normale ES , faranno pure ES , CS flussioni del secondo ordine, imperciocchè ciascuna minore di EC .

TEOREMA III.

8. Se nel circolo si prenda un'arco infinitesimo del primo ordine; dico che il seno verso sarà quantità infinitesima del secondo, e la differenza fra il seno retto, e la tangente sarà infinitesima del terzo.

Sia l'arco DC (Fig. 10.) infinitesimo del primo ordine, DB il seno retto, CE la tangente, e si conduca DF parallela ad AC . Per la natura del circolo si à $GB, BD :: BD, BC$; ma GB è quantità finita, e BD infinitesima del primo ordine, adunque siccome GB è infinitamente maggiore di BD , così sarà BD infinitamente maggiore di BC , e però BC , o sia DF infinitesima del secondo ordine. Per la similitudine de' triangoli ABD, DFE , sarà $AB, BD :: DF, FE$; ma AB quantità finita è infinitamente maggiore di BD infinitesima del primo ordine, adunque DF infinitesima del secondo ordine sarà infinitamente maggiore di FE ; e però FE flussione del terzo.

COROL-

COROLLARIO I.

9. E poichè la tangente è sempre maggiore dell'arco, l'arco della corda, e la corda del seno retto; potendosi assumere per eguali la tangente, ed il seno retto, giacchè non differiscono se non per una infinitesima del terzo, si potranno anco assumere per eguali la tangente, l'arco, la corda, ed il seno retto.

COROLLARIO II.

10. Se s'immagineremo, che il raggio del circolo sia AN infinitesimo del primo ordine, farà l'arco NO , ed il seno OM infinitesimo del secondo, e però il seno verso MN infinitesimo del terzo.

COROLLARIO III.

11. Sieno nell'asse DM (Fig. 11., e 12.) due differenze prime, ed eguali HI , IM , alle quali corrispondono i due archi infinitesimi di curva AB , BE , e si tirino le due corde BE , AB , e questa prodotta incontri in C l'ordinata ME parimenti prodotta, se fa d'uopo. Si tiri ES perpendicolare a BC , e col centro B , raggio BE l'arco EO . Per il Corollario del Teorema II., CS è infinitesima del secondo grado, e per l'antecedente, OS è infinitesima del terzo, dunque CO è infiniti-

infinitesima del secondo, perchè l'infinitesima del terzo aggiunta, o sottratta dall'infinitesima del secondo non fa alcuna alterazione; ma essendo $HI = IM$, o sia $AF = BG$, per i triangoli simili, ed eguali AFB, BGC , è anco $AB = BC$, ma gl'archi possono assumersi eguali alle corde, dunque CO sarà la differenza de' due archi AB, BE , e però se sia la curva $DA = s$, sarà $AB = BC = ds$, $CO = -ds$ col segno negativo, perchè AB v'è calando, essendo BE minore di AB nella Fig. 11., ed all'opposto col segno positivo nella Fig. 12.

S C O L I O .

12. Nel determinare le seconde differenze dell'ordinata, e dell'arco della curva ô supposto, e nel Teorema II., ed in quest'ultimo Corollario, che le HI, IM sieno eguali, vale a dire, che la differenza prima dell'affissa non si alteri giammai, ma rimanga costante, nel qual caso la differenza seconda dell'affissa è nulla, cioè chiamata x l'affissa, dx la prima differenza, è $ddx = 0$.

Si fanno però due altre supposizioni ancora, cioè l'una, che sia costante la differenza prima dell'ordinata, e variabile quella dell'affissa, e della curva; l'altra, che sia costante la differenza prima della curva, e variabile quella dell'affissa, e dell'ordinata.

Ma dalle premesse cose è facile il passaggio a

Tom. II.

G

quest'

queste altre due ipotesi. Ritenuto ciò, ch'è stato detto di sopra, sia (Fig. 13., e 14.) $BF=EG$, cioè costante la flussione dell'ordinata, si conduca EP parallela a BG , e PT perpendicolare, sarà dunque $BF=PT$, quindi $AF=BT$, $AB=BP$, e però GT , o sia EP la differenza tra HI , ed IM ; e descritto col centro B , intervallo BE , l'arco EO , sarà PO la differenza tra l'arco AB , e l'arco BE , potendosi assumere le corde per gl'archi infinitesimi. Ma, per i triangoli simili BTP , CEP , avremo $PT, TB::CE, EP$; $PT, PB::CE, CP$; e PT, TB, BP sono flussioni prime, e CE flussione seconda, dunque saranno EP, CP , e molto più OP flussioni seconde, onde se sia $DH=x$, $DA=s$, sarà $TG=PE=ddx$, $PO=dds$ nella Fig. 13., e $PE=-ddx$, $PO=-dds$ nella Fig. 14., e $ddy=0$.

Sia costante il differenziale primo della curva, cioè $AB=BE$. Dal punto O si abbassi ON parallela a TP . Poichè per la supposizione è $AB=BE=BO$, sarà anco $AF=BN$, adunque VE , o sia NG è la differenza tra HI , ed IM ; ma sarà anco $FB=NO$, dunque VO è la differenza tra BF , ed EG . Ma egli è chiaro, che essendo flussione del secondo ordine EC , lo sono pure EV , ed VO ; dunque se sia $DH=x$, $HA=y$, sarà $NG=ddx$, $OV=-ddy$ nella Fig. 13., ed $NG=-ddx$, $OV=ddy$ nella Fig. 14., e $dx=0$.

La supposizione di una prima flussione costante, rende

rende più brevi e facili i calcoli , come si vedrà nel farne uso ; in varj incontri però , a fine di maggiore universalità , si procede dalle prime alle seconde differenze , senza fare la supposizione di alcuna prima flussione costante , ed è facile il determinarle .

Siano (*Fig. 15., e 16.*) HI , IM flussioni prime , dell'assissa DH , ma non eguali , e la differenza tra loro sia ML , flussione seconda , e fatto il rimanente , come sopra , si tiri l'ordinata LN , e la Ei parallela a BG . Essendo adunque LM la differenza di HI , sarà $HI = IL$, cioè $AF = BR$, e però simili , ed eguali i triangoli ABF , BRN , ed in conseguenza $BF = NR$; dunque Ni sarà la differenza tra BF , ed EG , cioè la differenza di BF , o sia la differenza seconda di AH . Similmente sarà $AB = BN$, dunque NO sarà la differenza tra l'arco AB , e l'arco BE ; e però la differenza dell'arco AB , o sia la differenza seconda dell'arco DA , poichè egli è chiaro , che sono Ni , NO flussioni del secondo grado . Lo stesso discorso vale , se in luogo di supporfi IM maggiore di HI , di un differenziale secondo , si supponga minore .

13. Avvertirò , che le determinazioni fissate non racchiudono condizione alcuna intorno all'angolo delle coordinate , sebbene nelle Figure mostra di esser retto , ma nulla meno si deducono , qualunque siasi esso angolo .

L E M M A .

14. Gl'angoli rettilinei sono tra loro nella ragione diretta degl'archi, e nell'inversa de' raggi.

Sieno i due angoli (Fig. 17.) EAB , FAC . Prodotta AE in D , per la similitudine de' settori ABE , ACD , farà $AB, BE :: AC, CD$, e però $CD = \frac{BE \times AC}{AB}$.

Ma l'angolo EAB , o sia DAC , è all'angolo FAC , come CD a CF ; dunque l'angolo EAB farà all'angolo FAC , come $\frac{BE \times AC}{AB}$ a CF , cioè come $\frac{BE}{AB}$ a $\frac{CF}{AC}$.

T E O R E M A I V .

15. Preso l'arco CF (Fig. 18.) infinitesimo del primo grado della curva ACF qualunque, e condotte le perpendicolari CI , FI alla curva, se col centro I , intervallo IF , si descriverà l'arco di circolo FS , dico: che egli caderà tutto al di dentro della curva ACF verso C , e l'intercetta CS farà quantità infinitesima del terzo grado.

Sulla curva AQR s'intenda condotto un filo, il quale essendo fisso al disotto nel punto R , e preso nel punto A , si vada scostando dalla curva, ma in modo, che sia sempre teso, onde il punto A descriva la curva ACF . Essendo il filo nella polizione CQ , farà tangen-

te della curva nel punto Q ; e nella posizione FR , che intendo infinitamente prossima alla CQ , sarà tangente in R , e prodotta CQ incontrerà FR in I . Poichè, per la generazione della curva ACF , la retta QC è eguale alla curva QA , e la retta RF alla curva RQA , e le due tangenti infinitesime QI , RI sono assieme maggiori dell'elemento QR ; faranno anco CI , IR prese assieme maggiori della curva RQA , o sia della retta FR ; dunque tolta la comune IR , sarà IC maggiore di IF , ed il circolo FS , descritto col centro I , intervallo IF , caderà dentro la curva. Ma per il I., e III. Teorema le due tangenti QI , RI non superano l'arco QR , che per una flussione terza, dunque la curva AQ assieme con le rette QI , IR supera della stessa quantità la curva AQR , cioè la retta FR ; e detratta la comune IR , sarà AQ con QI , cioè IC maggiore di IF per una infinitesima del terzo ordine.

COROLLARIO.

16. Adunque si potrà considerare l'arco di circolo FS , come se si confondesse con l'arco di curva FC ; e potrà prenderli indifferentemente l'uno per l'altro, e la tangente RF sarà perpendicolare alla curva ACF nel punto F , e QC nel punto C .

La curva AQR si chiama l'*Evoluta*, ACF la *Germata dell'Evoluta*, cioè nata dallo scioglimento del filo

filo della AQR ; ed il circolo FS , del centro I , raggio IF , il *Circolo Osculatore*.

TEOREMA V.

17. Se alla curva $DABE$ (Fig. 11., e 12.) ne' punti infinitamente prossimi A, B, E , cioè essendo gl'archetti AB, BE infinitesimi primi, si conducano le perpendicolari QA, QB , ed NE , la quale incontri la BQ nel punto N . Dico: che gl'angoli AQB, BNE potranno assumersi per eguali.

Per l'antecedente Lemma, l'angolo AQB stà all'angolo BNE , come $\frac{AB}{AQ}$ ad $\frac{EB}{BN}$, cioè come $AB \times BN$

ad $EB \times AQ$, ma il rettangolo $EB \times AQ$ non è minore del rettangolo $AB \times BN$, se non per il rettangolo $BE \times QN$, e per il rettangolo di BN nella differenza degl'archetti AB, BE ; ed essendo QN, BE quantità infinitesime del primo grado, sarà il rettangolo da esse fatto quantità infinitesima del secondo, siccome essendo la differenza degl'archetti AB, BE infinitesima del secondo, sarà pure il rettangolo di questa in BN quantità infinitesima del secondo, adunque i due rettangoli $AB \times BN, EB \times AQ$ non sono diversi, se non per due rettangoli infinitesimi del secondo grado; adunque possono prenderli per eguali, ed in conseguenza anco gl'angoli AQB, BNE .

COROL-

COROLLARIO I.

18. Si conduca PBR tangente nel punto B ; questa dividerà in due egualmente l'angolo CBE fatto dalle due corde ABC , e BE ; imperciocchè essendo (Corollario III. Teorema I.) l'angolo BQA doppio dell'angolo PBA , a cui è eguale l'angolo CBR , anche l'angolo BNE sarà doppio dell'angolo CBR ; ma, per lo stesso Corollario, l'angolo BNE è doppio pure dell'angolo RBE , adunque sono eguali gl'angoli CBR , RBE .

COROLLARIO II.

19. Sarà adunque l'angolo CBE eguale all'angolo BNE , e quindi il settore BNE simile al settore EBO .

TEOREMA VI.

20. Se in due circoli, i diametri de' quali si eccedano d'un'infinitesima prima, si prenderanno due seni retti eguali, ed infinitesimi del primo grado; la differenza dei seni versi sarà infinitesima del terzo.

Sieno i due circoli ABC , PFH , (Fig. 19.) i seni retti infinitesimi del primo grado, ed eguali sieno BE , FG , i seni versi EC , GH . Si tirino le cor-

de

de AB , BC . Essendo il seno BE , e però l'arco BC flussione prima, sarà l'angolo BMC infinitesimo del primo ordine, e però anche l'angolo BAC , che ne è la metà, e l'angolo EBC , che a quello è eguale; adunque poichè l'angolo EBC , ed i lati EB , BC sono infinitesimi primi, sarà il seno verso EC infinitesimo secondo.

Lo stesso vale del seno verso GH . Ma il seno verso EC (per la proprietà del circolo) si trova essere

$$= \frac{\overline{EB}^2}{\overline{AE}}, \text{ ed il seno verso } GH = \frac{\overline{GF}^2}{\overline{PG}} = \frac{\overline{EB}^2}{\overline{PG}}, \text{ dunque}$$

avremo l'analogue EC , $GH :: PG$, AE ; ma PG quantità finita supera AE quantità finita d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del primo ordine, per l'ipotesi, dunque EC quantità infinitesima del secondo ordine supererà GH infinitesima del secondo, d'una quantità infinitesima rispetto a se, cioè del terzo.

TEOREMA VII.

* 21. Sia la curva BEG (Fig. 20., e 21.) riferita al fuoco, cioè tale, che le ordinate tutte si partano da un punto dato, che si chiama il fuoco, e sia A , da cui si conducano tre ordinate infinitamente prossime AB , AE , AG , le quali comprendano i due archetti infinitesimi del primo grado BE , EG , e si tiri la corda

da BE , la quale prodotta incontri in L l'ordinata AG pure prodotta, se fa bisogno. Col centro A si descrivano gl'archi BC , EF , e sieno BM , EN i loro seni retti; indi si faccia l'angolo NEP eguale all'angolo MBE , dico: che l'intercetta GP sarà differenza infinitesima del secondo ordine dell'ordinata AB .

Si tirì la corda EG . Poichè gl'angoli MBE , NEP sono eguali per la costruzione, e gl'angoli in M , ed N sono retti, saranno simili i triangoli EBM , PEN ; quindi preso per costante il seno BM , cioè supposto eguale ad EN , i predetti triangoli saranno in oltre eguali, e però sarà $ME = NP$. Ma supposto $BM = EN$, per l'antecedente teorema, la differenza de' seni versì MC , NF è infinitesima rispetto a loro, dunque saranno anco eguali le CE , FP , e però GP sarà la differenza tra CE , ed FG . Ma condotte perpendicolari alla curva ne' punti E , G le rette EQ , QG , l'angolo LEG è eguale all'angolo EQG per il Corollario II. del Teorema V., (il quale si verifica, o sia la curva riferita all'asse, o sia riferita al fuoco) e l'angolo EQG è infinitamente piccolo, dunque sarà infinitamente piccolo anche l'angolo LEG ; e perchè sono infiniteime del primo ordine le rette EG , EL , sarà GL infinitesima del secondo, e molto più GP rispetto alla Fig. 20.

Per il Corollario I. del Teorema III. il seno BM

Tom. II.

D

è

è eguale all'arco BC ; dunque, preso per costante in luogo del seno l'arco, e chiamato esso $= dx$, $AB=y$, $CE=dy$, sarà $GP=-dy$. E descritto col centro E , intervallo EG l'arco GV , sarà $PP=-dds$, se sia $BE=ds$.

COROLLARIO.

22. L'angolo LEP sarà eguale all'angolo EAG ; imperciocchè l'angolo EPA , per la costruzione, è eguale all'angolo BEA , ma EPA esterno è eguale ai due interni L , ed LEP ; e l'altro BEA eguale ai due L , ed EAG , dunque tolto il comune L , rimarranno eguali i due LEP , EAG . E perchè ciò si verifica, o sia la curva concava al punto A , (Fig. 20.) o sia convessa, (Fig. 21.) come è facile a vedere, sarà nella stessa Fig. 21. infinitesimo l'angolo LEP , e quindi infinitesima del secondo ordine la LP , ma si è veduto, che GL è pure infinitesima del secondo, dunque lo sarà anche tutta la GP , che sarà $=ddy$; e col centro E , intervallo EG descritto l'arco GV , sarà $PV=dis$.

Facendo l'ipotesi della dy costante, col centro A , intervallo AG si descriva l'arco GT , e dal punto T si tiri la retta TOA . Poichè $FG=EC$, per l'ipotesi, sarà il triangolo TEO simile, ed eguale al triangolo EBC , e però $BC=EO$, e $BE=ET$; dunque

que $OF = ddx$, e $TV = dds$ nella Fig. 20.; ma $OF = -ddx$, e $TV = -dds$ nella Fig. 21.

Presa ds costante, si conduca la retta VRA , sarà $EG = EV = BE$, e però simili, ed eguali i triangoli EBC , EVR , adunque $BC = ER$, $CE = RV$; onde $RF = ddx$, $VI = -ddy$ nella Fig. 20., ma $RF = -ddx$, $VI = ddy$ nella Fig. 21.

Che se non si prenda alcuna prima flussione costante: sia EF maggiore di BC (Fig. 22., e 23.) per la flussione seconda RF ; si conduca la retta ART ; col centro A , intervallo AG l'arco GT ; e col centro E , intervallo EG l'arco GV . Poichè dunque $BC = ER$, sarà anco $CE = RI$, e $BE = EI$, adunque TI sarà la differenza tra CE , ed FG , ed VI la differenza tra BE , ed EG .

S C O L I O.

23. Non sarà fuor di proposito il prevenire una difficoltà, che mi potrebbe esser mossa. Ella è, che nel Teorema antecedente si assumono per eguali le CE , FP in virtù però del Teorema VI., ed il Teorema VI. suppone eguali i seni BM , EN ; dunque pare, che le determinazioni fissate de' differenziali secondi abbiano luogo solo nel caso, che si faccia l'ipotesi della flussione costante BC , e non nell'altre; ma per togliere questa difficoltà basta riflettere, che quan-

D 2

tunque

tunque si ponga variabile la BC , la differenza però è infinitesima del secondo grado, che non toglie l'egualianza tra le flussioni prime BC , EF ; e così nè meno tra i seni BM , EN .

S C O L I O I I .

24. Ne' premessi Teoremi si contengono i principj, con i quali si maneggiano le quantità infinitesime di qualunque grado, e ci si apre la strada di far buon ufo del calcolo differenziale, e sommatorio; ed ancora di applicare in oltre alle grandezze minime la Sintesi, e l'Analisi degli Antichi, e di servirsi della pura geometria, il che riesce di una particolare semplicità, ed eleganza.

Per iscanfare poi i paralogismi, ne' quali pur troppo è facile incorrere, gioverà il riflettere, che nelle linee infinitamente piccole di qualsivoglia ordine, conforme si pratica anco nelle finite, anno a considerarsi due importanti circostanze, cioè la loro grandezza, e la loro posizione. E quanto alla grandezza non credo, che mai si possa sbagliare, se non da coloro, che credono tali grandezze infinitesime un mero nulla.

Ora sebbene le quantità col diminuirsi all'infinito passano da genere a genere, le proporzioni in qualunque ordine persistono le medesime; e perchè di tre
linee

linee della stessa classe può costituirsi un triangolo, si noti, che minorandosi proporzionalmente i lati fino a far transito da un grado all'altro, non si mutano gli angoli, che sempre fra loro la stessa ragione conservano. In tali incontri non è mai lecito prendere una linea per l'altra, nè fingere eguaglianza, o adeguazione dove non ci può essere, anzi conviene tener ferme le analogie, e paragonare i triangoli d'un genere con quelli dell'altro, cioè gl'infinitesimi coi finiti, e gl'infinitesimi del secondo ordine con quelli del primo, e con i finiti, e così vada discorrendo.

Ma se due grandezze di qual si sia ordine differiranno per una grandezza, che rispetto a loro sia inassegnabile, sicuramente, e senza rischio alcuno d'errare una si può prendere per l'altra, nè v'è timore, che l'adequamento porti un minimo sconcerto.

Fa d'uopo adunque stare molto guardinghi quando si tratta della posizione delle linee, e degl'angoli, conciosiacchè il confondergli quando non deesi tira seco manifesti paralogismi.

25. Stabiliti i fondamenti principali di questo calcolo, farò passaggio alle maniere, o regole di differenziare le formole. Ed in primo luogo, debbasi prendere la differenza di varie quantità sommate assieme, o sottratte l'una dell'altra, per esempio di $a + x + z + y - u$. Siccome la differenza di x è dx , di z è dz ec.,

e

e della a costante è nulla, considerando ogni quantità accresciuta della sua differenza con quel segno, che le compete, la formola proposta si muterà in quest'altra $a + x + dx + z + dz + y + dy - u - du$, da cui sottraendo la prima, sarà il residuo $dx + dz + dy - du$, che è appunto ciò, per cui è cresciuta la quantità proposta, vale a dire la sua differenza.

Da ciò si ricava la regola generale, che per differenziare qualunque complesso di quantità analitiche di una dimensione, basterà prendere le differenze di ciascheduna variabile coi loro segni, ed il complesso di queste differenze sarà la differenza della quantità proposta. La differenza adunque di $b - s - z$ sarà $-ds - dz$; la differenza di $ax - 4bz + by$ sarà $-4bdz + bdy$.

26. Che se la quantità proposta da differenziarsi sarà il prodotto di più variabili, come xy , mentre x diviene $x + dx$, la y diviene $y + dy$, ed xy diviene $xy + ydx + xdy + dxdy$, che è il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$; da questo prodotto adunque sottratta la quantità proposta xy , rimane $ydx + xdy + dxdy$, ma $dxdy$ è quantità infinitamente minore di ciascheduna dell'altre due, le quali sono il rettangolo di una quantità finita in una infinitesima, e $dxdy$ è il rettangolo di due infinitesime, e però infinitamente minore, dunque esso rettangolo si potrà francamente trascurare, quindi la differenza di xy sarà $x dy + y dx$.

Sia

Sia da differenziarsi xyz ; il prodotto di $x + dx$ in $y + dy$ in $z + dz$ è $xyz + yzdx + xzdy + xydz + zdx dy + ydx dz + xdy dz + dxdydz$, il quale, sottratta la quantità proposta, rimane $yzdx + xzdy + xydz + zdx dy + ydx dz + xdy dz + dxdydz$; ma il primo, secondo, e terzo termine è ciascuno il prodotto di due quantità finite, e di una infinitesima; ed il quarto, quinto, e sesto è ciascuno il prodotto di una quantità finita, e di due infinitesime, dunque ciascuno di questi è infinitamente minore di ciascuno di quelli, e però si potrà trascurare, e molto più l'ultimo, che è il prodotto di tre infinitesimi; trascurati per tanto tutti i termini, principiando dal quarto, sarà $yzdx + xzdy + xydz$ la differenza di xyz .

Quindi nasce la regola, che per differenziare un prodotto di più quantità moltiplicate assieme, si dovrà prendere la somma de' prodotti della differenza di ciascuna di tali quantità nel prodotto dell'altre. La differenza adunque di $bxzt$ sarà $bxzdt + bxt dz + btz dx + xzt \times 0$, perchè la differenza della costante b è nulla, cioè la differenza di $bxzt$ sarà $bxzdt + bxt dz + btz dx$. La differenza di $a + x \times b - y$ sarà $dx \times b - y - dy \times a + x$, cioè $bdx - ydx - ady - xdy$.

27. La formola da differenziarsi sia una frazione, per esempio, $\frac{x}{y}$. Si ponga $\frac{x}{y} = z$, sarà dunque $x = zy$,

e però anche eguali le loro differenze, cioè $dx = zdy + ydz$, quindi $dz = \frac{dx - zdy}{y}$, ora $z = \frac{x}{y}$, sostituito pertanto questo valore in luogo di z , farà $dz = \frac{dx - xdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$; ma se $z = \frac{x}{y}$, farà dz il differenziale di $\frac{x}{y}$, dunque il differenziale di $\frac{x}{y}$ farà $-\frac{xdy + ydx}{yy}$.

E la regola farà, che il differenziale d'una frazione farà un'altra frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore della proposta frazione; ed il denominatore sia il quadrato del denominatore della stessa proposta frazione da differenziarsi.

La differenza adunque di $\frac{a}{x}$ farà $-\frac{adx}{xx}$. La differenza di $\frac{a+x}{x}$ farà $\frac{xdx - adx - xdx}{xx}$, cioè $-\frac{adx}{xx}$.

La differenza di $\frac{y}{b-y}$ farà $\frac{bdy - ydy + ydy}{b-y^2}$, cioè $\frac{bdy}{b-y^2}$.

La differenza di $\frac{3xy}{a-x}$ farà $\frac{3xdy + 3ydx \times a - x + dx \times 3xy}{a-x^2}$,

cioè $\frac{3axy + 3aydx - 3xxdy}{a-x^2}$.

28. Debbanfi differenziare le potestà. E sia in primo luogo una potestà perfetta, e positiva, cioè di esponente intero positivo, per esempio, xx ; ora xx è il prodotto di x in x , adunque per la regola de' prodotti il differenziale farà $x dx + x dx$, cioè $2x dx$. Sia da differenziarsi x^2 ; ma x^2 è il prodotto di x in x in x , adunque il differenziale farà $xx dx + xx dx + xx dx$, cioè $3xx dx$, e comechè la facenda procede con lo stesso ordine all' infinito, il differenziale di x^m , essendo m un numero qualunque intiero positivo, farà $mx^{m-1} dx$.

Se l'esponente farà negativo, per esempio ax^{-1} , o sia $\frac{a}{xx}$, il differenziale, per la regola delle frazioni,

farà il prodotto della differenza del numeratore nel denominatore, meno il prodotto della differenza del denominatore nel numeratore, diviso il tutto per il quadrato del denominatore; ma il differenziale del denominatore è $2x dx$, dunque il differenziale di ax^{-1} , o sia $\frac{a}{xx}$, farà $-\frac{2ax dx}{x^4}$, cioè $-\frac{2ax}{x^3}$; il differenziale

di x^{-1} , o sia di $\frac{1}{x}$, farà $-\frac{3xx dx}{x^4}$, cioè $-\frac{3dx}{x^3}$; e

generalmente il differenziale di $\frac{ax^{-m}}{b}$, o sia di $\frac{a}{bx^m}$,

farà $-\frac{max^{m-1} dx}{bx^{2m}}$, cioè $-\frac{max^{m-1} dx}{b}$.

Sia la potenza imperfetta, ed in primo luogo positiva (cioè l'esponente sia rotto positivo) $\sqrt[n]{x^m}$, o sia $x^{\frac{m}{n}}$, esprimendo $\frac{m}{n}$ un qualunque rotto positivo.

Si ponga $x^{\frac{m}{n}} = z$, ed elevando ciascun membro alla potenza n , $x^m = z^n$, e differenziando, $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, onde $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}$, ma essendo $x^m = z^n$ è

anco $z^{n-1} = x^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}}$, dunque sostituito questo valore in luogo di z^{n-1} , farà $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}}}$, cioè

$$dz = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} dx,$$

Se l'esponente sarà negativo, come $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$, cioè $x^{-\frac{m}{n}}$, o sia $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, il differenziale, per la regola delle frazioni, farà $-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} dx$, cioè

$$-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} dx.$$

La

La regola generale è adunque, che il differenziale d'una qualunque potenza perfetta, o imperfetta, positiva, o negativa, è il prodotto dell'esponente della potenza nella quantità elevata alla potenza minore, per l'unità, della potenza data, ed il tutto moltiplicato nella differenza della quantità.

Sia da differenziarsi $x^{\frac{1}{2}}$, il differenziale sarà $\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} dx$, cioè $\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} dx$, o sia $\frac{1}{2} dx \sqrt{x}$.

Sia $x^{\frac{5}{4}}$, la differenza sarà $\frac{5}{4} x^{\frac{5}{4}-1} dx$, cioè $\frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} dx$, o sia $\frac{5}{4} dx \sqrt[4]{x}$.

Sia $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, cioè $x^{-\frac{1}{2}}$, la differenza sarà $-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} dx$, cioè $-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx$, o sia $-\frac{3dx}{2x^{\frac{3}{2}}}$.

Sia da differenziarsi $\frac{ax+xx^2}{2}$, farà la differenza $\frac{2 \times ax + xx^2 \times adx + 2x dx}{2}$, cioè $2axdx + 6axx dx + 2x^2 dx$.

Sia $\frac{xy+ax^2}{3}$, la differenza sarà $\frac{3 \times xy + ax^2 \times xdy + ydx + adx}{3}$,

E 2

. cioè

cioè $3x'ydy + 6ax'ydy + 3aax'dy + 3y'xxdx + 9ayyxxdx + 9aayxxdx + 3a'xxdx$.

Sia $\sqrt[3]{ax-yy}$, farà la differenza $-2 \times \frac{ax-yy}{ax-yy} \times \frac{adx-2ydy}{ax-yy}$,
cioè $-\frac{2adx+4ydy}{ax-yy}$.

Sia $\sqrt[3]{ax-xx}$, cioè $\frac{ax-xx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza
 $\frac{1}{3} \times \frac{ax-xx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}-1} \times \frac{adx-2xdx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}}$, cioè $\frac{adx-2xdx}{2 \times \frac{ax-xx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}}}$,

o sia $\frac{adx-2xdx}{2 \sqrt[3]{ax-xx}}$.

Sia $\sqrt[3]{xx+xy}$, cioè $\frac{xx+xy}{xx+xy}^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza
 $\frac{1}{3} \times \frac{xx+xy}{xx+xy}^{\frac{1}{3}-1} \times \frac{2xdx+xdy+ydx}{xx+xy}^{\frac{1}{3}}$, o sia
 $\frac{2xdx+xdy+ydx}{2 \sqrt[3]{xx+xy}}$.

Sia $\sqrt[3]{ax-xx}$, cioè $\frac{ax-xx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza
 $\frac{1}{3} \times \frac{ax-xx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}-1} \times \frac{adx-2xdx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}}$, o sia
 $\frac{adx-2xdx}{3 \times \frac{ax-xx}{ax-xx}^{\frac{1}{3}}}$.

Sia

Sia $\frac{1}{\sqrt[3]{ay+xy}}$, cioè $\frac{1}{ay+xy}^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza

$$-\frac{1}{3} \times \frac{ay+xy}{ay+xy}^{\frac{1}{3}-1} \times \frac{ady+xdy+ydx}{ay+xy}^{\frac{2}{3}},$$

$$-\frac{ady+xdy+ydx}{3 \times ay+xy}^{\frac{4}{3}}.$$

Sia $\frac{a-x}{\sqrt[3]{a+x}}$, cioè $\frac{a-x}{a+x} \times \frac{a+x}{a+x}^{\frac{1}{3}}$, farà la differenza $-dx \times \frac{a-x}{a+x}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{a-x}{a+x}^{\frac{1}{3}-1} \times \frac{a-x}{a+x} \times dx$,
o sia $-dx \sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}} + \frac{1}{3} \frac{dx \times a-x}{\sqrt[3]{a+x}^2}$.

Sia $\frac{\sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}}{\sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{1}{2}}}$, cioè $\frac{ax+xx + \sqrt[4]{a^4-x^4}}{\sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{1}{2}}}$, farà la differenza

$$\frac{adx+2xdx - \frac{x^3 dx}{a^4-x^4}}{2 \times \frac{\sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{1}{2}} \sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}}{2 \times \sqrt[4]{a^4-x^4}^{\frac{1}{2}} \sqrt{ax+xx} + \sqrt[4]{a^4-x^4}}}$$

Sia

Sia $\frac{ax + xx}{\sqrt{ax + xx}}$, farà la differenza

$$\frac{3axxdx + 2x^1 dx - a^1 dx - 2axxdx}{2 \times \frac{1}{2} \sqrt{ax + xx}}$$

$$2 \times \frac{1}{2} \sqrt{ax + xx}$$

Sia $\frac{x \sqrt{ax + xx}}{a \sqrt{ay - xy}}$, farà la differenza

$$\frac{3aayxdx + 2ayxxdx - 3yx^1 dx - aaxxdy + x^1 dy}{2a \times \frac{1}{2} \sqrt{ay - xy} \sqrt{ax + xx}}$$

29. In quella guisa, che si prendono le differenze prime delle quantità finite, si prendono ancora le differenze delle quantità infinitesime del primo ordine, e le differenze delle quantità infinitesime del secondo, e così successivamente, servendosi delle stesse regole, che ô fin' ora spiegate.

Solo vi farà da riflettere, se alcuna flussione prima sia stata assunta per costante, e quale essa sia, poichè la di lei differenza sarà nulla, e si dovrà omettere nel differenziare.

Sia proposta da differenziarsi la formola $ydx - xdy$, e non sia stata assunta costante flussione alcuna, la differenza sarà $dx dy + yddx - dx dy - xddy$, cioè $yddx - xddy$. Sia stata assunta costante la flussione dx , farà la differenza $dx dy - dx dy - xddy$, cioè $-xddy$. Sia costante la flussione dy , farà la differenza $dx dy + yddx - dx dy$, cioè $yddx$.

Sia

Sia $y \frac{dx}{dy}$, in cui nessuna flussione prima si prenda costante, farà la differenza $\frac{dx \cdot dy^2 + y dy ddx - y dx ddy}{dy^2}$; presa costante dx , farà $\frac{dy^2 dx - y dx ddy}{dy^2}$; presa per costante dy , farà $\frac{dy^2 dx + y dy ddx}{dy^2}$, cioè $\frac{dy dx + y ddx}{dy}$.

Sia $y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e costante la dz , farà la differenza $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz \times \frac{dx ddx + dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{dz^2}$, cioè

$$\frac{dx^2 dy + dy^3 + y dx ddx + y dy ddy}{dz \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Presa per costante dy , farà $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz ddx - y dz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, cioè

$$\frac{dx^2 dy dz + dy^3 dz + y dz ddx - y dx^2 ddz - y dy^2 ddz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Presa per costante dx , farà $\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz \times \frac{dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - y dz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$;

cioè

$$\text{cioè } \frac{dx^2 dy dz + dy^2 dz + y dz dy dy - y dx^2 d dz - y dy^2 d dz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

E finalmente presa nessuna flussione costante, farà la differenza

$$\frac{dy dz \sqrt{dx^2 + dy^2} + y dz \times \frac{dx dx + dy dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - y d dz \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dz^2}$$

$$\text{cioè } \frac{dx^2 dy dz + dy^2 dz + y dz dx dx + y dz dy dy - y dx^2 d dz - y dy^2 d dz}{dz^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

E se in questa si cancelleranno tutti i termini, ne quali si trova la ddz , cioè fatta l'ipotesi di dz costante, si muterà essa nella prima; cancellando quelli, ne quali si trova la ddy , si muterà nella seconda; e cancellando quelli, ne quali si trova la ddx , si muterà nella terza, come è chiaro.

Sia $xx + yy$, e costante dx , farà la differenza

$$\frac{\frac{xx + yy}{\sqrt{xx + yy}} - \frac{xx + yy}{\sqrt{xx + yy}} \times \frac{xx + yy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

$$\text{cioè } \frac{xx dy^2 + xx y ddy + yy dx^2 + y^2 ddy - 2xy dx dy}{xx + yy^2}$$

Presa

Presa per costante dy , sarà

$$\frac{dx^2 + xddx + dy^2 \sqrt{xx + yy} - xdx - ydy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

cioè $\frac{x^2 ddx + xxdy^2 + ydydx^2 + yxyddx - 2xydx dy}{xx + yy^2}$.

E finalmente presa nessuna flussione costante, sarà

$$\frac{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy \sqrt{xx + yy} - xdx - ydy \times \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}}{xx + yy}$$

cioè $\frac{x^2 ddx + xxdy^2 + xxyddy + ydydx^2 + yxyddx + y^2 ddy - 2xydx dy}{xx + yy^2}$.

Sia proposta da differenziarsi la formola differenziale del secondo grado $\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx dy}$, o sia.

$\frac{dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}}{dx dy}$, e si prenda dx costante, sarà la differenza

$$\frac{3 \times dyddy \times \frac{1}{dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}} \times -dxddy + dxddd \times \frac{1}{dx^2 + dy^2^{\frac{1}{2}}}}{dx^2 ddy^2}$$

L'ipotesi di dy costante ripugna per questa formola, in cui già si trova la ddy .

Tom. II.

F

Presa

Presa nessuna flussione costante, sarà

$$\frac{3 \times dxddx + dyddy \times dx^2 + dy^2 \times -dxddy + dxddy + ddxddy \times dx^2 + dy^2}{dx^2 ddy^2}$$

Con simil metodo si proceda in tutti gl'altri casi più composti.



CAPO

C A P O I I.

Del Metodo delle Tangenti.

30. **A**LLa Curva ADF (Fig. 24., e 25.) sia tangente in un qualunque punto la retta $T DG$, e perpendicolare all'asse AB l'ordinata BD nel punto B , alla quale sia infinitamente prossima CF , che prodotta (se fa bisogno) incontri la tangente nel punto G , e si tiri DE parallela all'asse AB . Per quanto è stato dimostrato ne' premessi Teoremi, e suoi Corollarj, la GF sarà infinitesima rispetto ad EF , e sarà pure infinitesima rispetto all'archetto DF la differenza tra DF , e DG ; dunque si potranno usurpare per eguali le due EF , EG , siccome le due DF , DG ; e però, se sia $AB = x$, $BD = y$, sarà $EF = EG = dy$, $DF = DG = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ma i triangoli simili GED , DBT ci danno l'analogia GE , $ED :: DB$, BT , cioè in termini analitici, dy , $dx :: y$, BT , dunque $BT = y \frac{dx}{dy}$, ed ec-

co la formola generale della sottotangente per qualunque curva.

Nel caso per tanto di una curva data nulla altro rimarrà da farsi, per averne la sottotangente, che dif-

ferenziare l'equazione, ed il valore della dx , o dy sostituirlo nella formola generale $y \frac{dx}{dy}$, con che svani-

ranno i differenziali, ed averassi il valore della sottotangente espresso in termini finiti, che compete alla data curva per un qualunque punto, e se si voglia per un determinato punto, basterà sostituire in luogo dell'incognite quel valore, che loro compete, rispetto al punto determinato.

31. Dal poterli assumere $EF=EG$, e $DF=DG$, ne viene, che si può considerare il punto G , come se cada in F , cioè, che la tangente DG , l'arco DF , e la sua corda si confondano assieme, vale a dire, che le curve sieno poligoni d'infiniti lati infinitamente piccoli. Questo discorso però procede solo, quando noi ci fermiamo nelle prime differenze; ma se si dovranno computare le seconde, non si confonderà il punto G col punto F essendo appunto GF una seconda differenza. Quindi perchè nel metodo delle tangenti non s'introducono differenziali secondi, farassi giustamente il supposto, che essa tangente si confonda con l'archetto, e sua corda.

32. Lo stesso triangolo GDE ci somministra le formole per l'altre linee analoghe alla sottotangente.

Per la similitudine de' triangoli GED , DBT , farà

GE ,

$GE, GD :: DB, DT$, cioè $dy, \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y, DT$; e però $DT = y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy}}$, formola generale della tangente.

Sia DN perpendicolare alla curva nel punto D , faranno simili i triangoli GDE, DBN , onde farà $DE, EG :: DB, BN$, cioè $dx, dy :: y, BN$; e però $BN = \frac{ydy}{dx}$, formola generale della sottornormale.

Sarà ancora $DE, DG :: DB, DN$, cioè $dx, \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y, DN$; e però $DN = y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx}}$, formola generale della normale.

Dal punto B si conduca BM normale a DN , e BH normale a DT . Il triangolo GDE farà simile al triangolo DBM , onde farà $GD, GE :: DB, BM$, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}, dy :: y, BM = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola

generale della linea BM .

Lo stesso triangolo GDE farà anco simile al triangolo DBH , onde farà $GD, DE :: DB, BH$, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}, dx :: y, BH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, formola ge-

nerale della linea BH .

33. La similitudine de' due triangoli $GED,$

DBT

DBT ci farà scoprire in oltre l'angolo, che fa con l'asse la tangente ad un qualsivoglia punto di curva, conciosiacchè sarà noto l'angolo DTB , qualora sia nota la ragione del seno retto DB al seno del complemento BT , cioè la ragione di GE ad ED , o sia di dy a dx .

Adunque data l'equazione della curva, se si differenzierà, e si risolverà in analogia, di cui sieno due termini dy , dx , avrassi la ragione de' seni dell'angolo DTB , e però noto l'angolo.

34. In virtù dello stesso discorso nascono le medesime formole anco nelle curve riferite al fuoco, (Fig. 26., e 27.) solo che si rifletta, che condotta dal fuoco B normale all'ordinata BD la retta BT , che incontri la tangente in T , i triangoli DBT , DGE saranno simili, perchè gl'angoli TBD , DEG sono retti, e l'angolo TDB non è maggiore dell'angolo DGE se non per l'angolo infinitesimo DBG , il che si vede chiaro conducendo GQ normale a TB ; adunque si potranno assumere per eguali i due angoli TDB , DGE , ed in conseguenza anco i due BTB , GDE , e però simili i due triangoli DTB , GDE ; ma in oltre GF è infinitesima rispetto ad EF , adunque ec.

ESEM-

E S E M P I O I.

35. Sia la curva ADF (Fig. 24.) la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$. Differenziando farà $adx = 2ydy$, e $dx = \frac{2ydy}{a}$. Sostituito per tanto quello

valore in luogo di dx nella formola generale della sottotangente $\frac{ydx}{dy}$, avremo $\frac{2yy}{a}$, o pure $2x$, posto in luogo

di yy il valore ax dato dall'equazione della curva. La sottotangente adunque nella parabola è doppia dell'assissa, e però se si prenda $AT = AB$, e dal punto T si tiri al punto D la retta TD , essa farà tangente della curva nel punto D . Se in luogo del valore di dx dato dall'equazione della curva, sostituiremo il valore di dy , cioè $\frac{adx}{2y}$ nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$, farà essa

ciò nulla ostante $\frac{2yy}{a}$, come prima, il che basterà d'avere notato in quest'esempio.

Nella stessa parabola si ricerchi la sottotnormale BN . La formola generale della sottotnormale è $\frac{ydy}{dx}$; ma per l'equazione della curva si ha $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione, farà la sottotnormale nella parabola

rabola $= \frac{a}{2}$, cioè la metà del parametro, e però presa $BN = \frac{a}{2}$, e dal punto N condotta al punto D la retta ND , farà essa normale alla curva in D .

Si ricerchi la tangente DT , la di cui formola generale è $y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy}}$. Per l'equazione della curva abbiamo $dx = \frac{2ydy}{a}$, dunque fatta la sostituzione di

questo valore in luogo di dx nella formola, avremo $y \sqrt{\frac{4yydy^2 + aady^2}{a^2dy}} = \frac{y}{a} \sqrt{4yy + aa} = \sqrt{4xx + aa}$, (posto in luogo di yy il valore ax dato dall'equazione) che è la tangente cercata.

Si ricerchi la normale DN . Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $y \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx}}$, farà essa $y \sqrt{\frac{4yydy^2 + aady^2}{2ydy}} = \sqrt{4yy + aa} = \sqrt{4ax + aa}$, posto in luogo di yy il valore dato dall'equazione.

Si ricerchi la retta BM . Sostituito il valore di $dx = \frac{2ydy}{a}$ nella formola generale $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, farà essa

$$\frac{aydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{ay}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{a\sqrt{ax}}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Si

Si ricerchi la retta BH . Sostituito il valore di dx nella formola generale $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, farà essa

$$\frac{zydy}{\sqrt{4yydy^2 + aady^2}} = \frac{zyy}{\sqrt{4yy + aa}} = \frac{zax}{\sqrt{4ax + aa}}.$$

Ritrovata la sottotangente, non è necessario alcun uso di formole per ritrovare l'altre linee, sebbene a motivo di esercizio me ne sono quì servita, imperciocchè, essendo nota la BT , il triangolo TBD rettangolo in B ci somministra la tangente TD , e la similitudine de' triangoli TBD , DBN , DMB , DHB l'altre linee tutte, e però ne' seguenti Esempj applicherò il metodo alle sole sottotangenti.

Se vogliasi l'angolo, che fa la tangente della parabola con l'asse. Presa l'equazione differenziale $adx = zydy$, e risolta in analogia, troverassi dy , $dx :: a, zy$, cioè che il seno retto BD è al seno del complemento BT , come il parametro al doppio dell'ordinata, dovunque siasi il punto D ; e se si vorrà fissata la tangente ad un punto determinato, per esempio al punto D , a cui corrisponda l'assissa $AB = x = \frac{a}{4}$, dall'equazione della curva trovata la y corrispondente, ad $x = \frac{a}{4}$, che in questo caso è $y = \frac{a}{2}$, farà l'analogo

già $dy, dx :: a, a$, cioè semiretto l'angolo DTB , quando sia $y = \frac{a}{2}$, o $x = \frac{a}{4}$.

Nel vertice A è $y = 0$, e però l'analogia per l'angolo della tangente nel vertice sarà $dy, dx :: a, 0$, cioè la ragione di dy a dx infinita, vale a dire il seno del complemento sarà nullo, e però la tangente nel vertice sarà perpendicolare all'asse.

ESEMPIO II.

36. Sia l'equazione generale di tutte le parabole di qualunque grado $x = y^m$, intendendo per m un qualunque numero positivo intero, o rotto, e che l'unità supplisca alle dimensioni. Differenziando sarà $dx = my^{m-1} dy$, e sostituito questo valore in luogo di dx nella formola generale $\frac{y dx}{dy}$, sarà la sottotangente

$= my^m = mx$. Sia $m = 3$, cioè la parabola prima cubica $x = y^3$, sarà la di lei sottotangente $= 3x$. Sia $m = \frac{3}{2}$, cioè la seconda parabola cubica $xx = y^3$, sarà la di lei sottotangente $= \frac{3}{2} x$ ec.

L'equazione differenziale $dx = my^{m-1} dy$ della curva ci dà l'analogia $dy, dx :: 1, my^{m-1}$; ma posta $y = 0$, se sarà m maggiore dell'unità, l'analogia sarà

rà $dy, dx :: 1, 0$, cioè la ragione di dy a dx infinita,
 e però la tangente nel vertice perpendicolare all'asse;
 e se farà m minore dell'unità, farà l'analogia $dy,$
 $dx :: 1, \frac{m}{y^{1-m}}$, cioè posta $y = 0$, $dy, dx :: 1, \frac{m}{0}$,

vale a dire la ragione di dy a dx infinitamente picco-
 la, e però la tangente nel vertice parallela all'asse.

E S E M P I O I I I .

37. Sia la curva DCE , (*Fig. 28.*) di cui si vuo-
 le la sottotangente, l'iperbola fra gl'asintoti dell'equa-
 zione $xy = aa$. Differenziando farà $xdy + ydx = 0$, e
 $dx = -\frac{xdy}{y}$; sostituito per tanto nella formola $\frac{ydx}{dy}$

della sottotangente il valore di dx , farà la sottotangen-
 te $= -x$, valore negativo, e questo vuol dire, che la
 sottotangente BT dee prendersi della parte opposta alle
 asisse.

Prefa adunque $BT = BA$, e condotta al punto C
 la retta TC , farà essa tangente della curva nel punto C .

Poichè nella curva DCE crescendo l'assisa, cala
 l'ordinata y , s'avrebbe dovuto nel differenziare pren-
 dere negativa la differenza dy , ma perchè per la stessa
 ragione s'avrebbe dovuto prendere negativa la stessa
 dy anco nella formola generale, si á ommesso di farlo

nell'uno, e nell'altro luogo, giacchè senza imbarazzarsi co' segni torna lo stesso, il che ora avvertito servirà per gl'altri simili casi.

Sia l'equazione generale $x = \frac{1}{y^m}$ a tutte le infinite

iperbole fra gl'asintoti, essendo m un qualunque numero positivo intero, o rotto. Differenziando avremo $dx = -\frac{my^{m-1}dy}{y^{2m}} = -\frac{m dy}{y^{m+1}}$, e sostituito questo va-

lore nella formula generale $\frac{y dx}{dy}$, la sottotangente sarà $-\frac{m}{y^m}$, o sia $-mx$, per l'equazione della curva.

ESEMPIO IV.

38. Sia la curva ADF (Fig. 24.) un circolo del diametro $= 2a$, $AB = x$, $BD = y$, farà l'equazione $2ax - xx = yy$, e differenziando $2adx - 2xdx = 2ydy$, e però $dx = \frac{ydy}{a-x}$, e sostituendo questo valore nella formula $\frac{y dx}{dy}$, farà la sottotangente $\frac{yy}{a-x}$, cioè $\frac{2ax - xx}{a-x}$,

posto in luogo di yy il valore dato dall'equazione. Sarà dunque la sottotangente nel circolo la quarta proporzionale di $a-x$, di $2a-x$, e della x .

Ma se il circolo farà dell'equazione $ax - xx = yy$,
nel

nel quale (Fig. 29.) si prendano le affisse $AB = x$ dal centro, differenziando avremo $-x dx = y dy$, e $dx = -\frac{y dy}{x}$, sostituendo per tanto questo valore nella formola, sarà la sottotangente $= -\frac{yy}{x}$, cioè la terza proporzionale di AB , e BD , ma negativa, vale a dire da prendersi da B verso T .

ESEMPIO V.

39. Sia la curva ADF (Fig. 24.) l'Ellissi dell'equazione $ax - xx = \frac{ayy}{b}$, prese le affisse dal vertice A .

Differenziando avremo $adx - 2x dx = \frac{2ay dy}{b}$, e

$dx = \frac{2ay dy}{b \times a - 2x}$. Sostituito questo valore nella formola

generale $\frac{y dx}{dy}$, sarà $\frac{2ayy}{b \times a - 2x}$ la sottotangente, o pure

$\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, posto in luogo di $\frac{ayy}{b}$ il valore $ax - xx$

dato dall'equazione. Fatta $x = \frac{1}{2}a$, metà dell'asse trasverso, nel valore della sottotangente, sarà essa $\frac{2aa}{0}$,

cioè infinita; adunque la tangente nel punto, in cui l'asse conjugato taglia la curva, sarà parallela all'asse tras-

trasverso, il che troveremo esser vero anche cercando, qual sia l'angolo, che essa tangente fa con il medesimo asse trasverso.

Sia generalmente l'equazione alle ellissi di qualunque grado $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$, intendendo per m ,

n due numeri positivi interi, o rotti. Differenziando farà $\frac{m+n}{b} \times ay^{m+n-1} dy = mx^{m-1} dx \times \overline{a-x}^n -$

$ndx \times \overline{a-x}^{n-1} \times x^m$, e però

$$dx = \frac{\frac{m+n}{b} \times ay^{m+n-1} dy}{\frac{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - bnx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}{m+n \times ay^{m+n}}}, \text{ e sostitu}$$

tuito questo valore nella formola generale, farà essa

$$\frac{\frac{m+n \times ay^{m+n}}{bmx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - bnx^m \times \overline{a-x}^{n-1}}}{m+n \times ay^{m+n}}, \text{ e posto in}$$

luogo di $\frac{ay^{m+n}}{b}$ il valore dato dall'equazione, farà la

$$\text{fottotangente } \frac{\overline{m+n \times x^m \times \overline{a-x}^n}}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - nx^m \times \overline{a-x}^{n-1}},$$

e dividendo il numeratore, e denominatore per

$$x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}, \text{ farà finalmente } \frac{m+n \times ax - xx}{ma - mx - nx}.$$

Sia

ANALITICHE LIB. II. 483

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'ellissi apolloniana, farà la sottotangente $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, come sopra. Sia $m=3$,

$n=2$, cioè l'equazione $\frac{ay^3}{b} = x^3 \times \frac{1}{a-x^2}$; farà la sottotangente $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$ ec.

Se l'equazione fosse $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \frac{1}{a+x^n}$, esprimerebbe essa tutte le iperbole di qualunque grado riferite agl'assi, prese istessamente le assisse dal vertice A . Operando nello stesso modo, troveremo essere la sottotangente $\frac{m+n \times ax + xx}{ma + mx + nx}$, diversa solo dall' antecedente ne' segni, siccome diversa solo ne' segni è l'equazione, da cui si ricava.

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'iperbola apolloniana, farà la sottotangente $\frac{2ax+2xx}{a+2x}$. Sia $m=3$, $n=2$, cioè l'equazione

$\frac{ay^3}{b} = x^3 \times \frac{1}{a+x^2}$, farà la sottotangente

$$\frac{5ax + 5xx}{3a + 5x} \text{ ec.}$$

40. Da questo metodo delle tangenti si ricava ancora la maniera di riconoscere, se le curve anno asin-

asintoti, ed il modo di condurli, quando essi sono inclinati all'asse, giacchè nel caso più semplice, che ad esso sieno, o perpendicolari, o paralleli, abbastanza si è parlato nel Libro I. Capo 5.

E S E M P I O I.

41. Sia la curva ADE (Fig. 30.) dell'equazione di sopra $ay^{m+n} = x^m \times \frac{a+x}{b}$, la di cui sottotangente

$$TB = \frac{m+n \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx}, \text{ farà dunque l'intercetta.}$$

$$AT = \frac{m+n \times \overline{ax+xx}}{ma+mx+nx} - x, \text{ cioè } \frac{na}{ma+mx+nx}.$$

Egli è chiaro, che la tangente TD diverrà asintoto, quando toccando ella la curva in infinita distanza, cioè quando l'assissa $AB=x$, essendo infinita, l'intercetta AT rimanga finita; ma posta x infinita nell'espressione di AT , il primo termine, ma del denominatore è infinitamente minore degli'altri, e però da trascurarsi, onde in questo caso sarà $AT = \frac{na}{mx+nx} = \frac{na}{m+n}$,

quantità finita, adunque la curva à l'asintoto, il quale partirà dal punto M , fatta $AM = \frac{na}{m+n}$. Ma per con-

durlo :

durlo: si alzi AH normale ad AB , e sia egli per esempio MHP ; ciò posto, se si prenda x infinita, farà dx , $dy :: MA, AH$, ed in questa supposizione di x infinita

l'equazione della curva $ay^{m+n} = x^m \times \overline{a+x}^n$ (essendo a nullo rispetto ad x) si muta in quest' altra $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$, o sia, estraendo la radice, e facen-

do per maggior comodo $m+n=t$, $y \sqrt[t]{a} = x \sqrt[t]{b}$, ma differenziando è $dy \sqrt[t]{a} = dx \sqrt[t]{b}$; dunque dx , $dy :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, dunque $MA, AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, e perchè $MA = \frac{na}{t}$, farà $\frac{na}{t}$, $AH :: \sqrt[t]{a}, \sqrt[t]{b}$, cioè

$$AH = \frac{na \sqrt[t]{b}}{t \sqrt[t]{a}}. \text{ Se per tanto si prenda } AM = \frac{na}{t}, \text{ e si}$$

alzi la normale $AH = \frac{na \sqrt[t]{b}}{t \sqrt[t]{a}}$, e si conduca infinita

la retta MHP , farà essa l'asintoto della curva ADE .

Sia $m=1$, $n=1$, cioè l'equazione $\frac{ayy}{b} = ax + xx$

all'iperbola apolloniana, farà $t=2$, e però $AM = \frac{a}{2}$,

$$AH = \frac{a \vee b}{2 \vee a} = \frac{\vee ab}{2}, \text{ cioè } AM \text{ la metà dell' asse traf-}$$

verso, ed AH la metà del conjugato, appunto come dalle sezioni coniche si fa, dover essere.

E S E M P I O II.

42. Sia ADE la curva dell'equazione $y' - x' = axy$; fatte le $AB = x$, $BD = y$. Differenziando avremo $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$, e però $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y' - axy}{3xx + ay}$, ed $AT = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y' - 3x' - 2axy}{3xx + ay}$, o pure, po-

sto in luogo di $3y' - 3x'$ il valore $3axy$ dato dall'equazione della curva, farà $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$; e fatta x

infinita, cioè nel caso dell'asintoto, in cui AT diviene AM , il termine ay è nullo rispetto a $3xx$, adunque farà $AM = \frac{axy}{3xx} = \frac{ay}{3x}$.

Ma poichè nell'equazione proposta non si possono separare le indeterminate, nè in conseguenza determinare il valore della AM ; si ponga $AM = \frac{ay}{3x} = t$,

(il medesimo, o simile artificio potrà servire in altri casi

casì della stessa natura) farà $y = \frac{3tx}{a}$, e sostituito questo

valore nell'equazione proposta , farà essa $\frac{27t^3x^3}{a^3} -$

$x^3 = 3txx$, ma quando sia x infinita , l'ultimo termine è nullo rispetto agl'altri ; adunque farà $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = 0$,

cioè $t = \frac{a}{3}$. Presa adunque $AM = \frac{a}{3}$, dal punto M si

dovrà condurre l'asintoto . Deve in oltre essere MA , $AH :: dx, dy$, e l'equazione proposta $y' - x' = axy$, o sia $y' = x' + axy$ si riduce ad essere $x' = y'$, cioè $x = y$, quando sia x infinita , e però $dx = dy$; adunque fatta $MA = AH$, se dal punto M per lo punto H si condurrà una retta , essa sarà l'asintoto della curva.

Aggiungo in oltre , che deve necessariamente la linea AT accostarsi ad un certo limite , oltre il quale non possa trascorrere , e che il menzionato limite talora è infinitesimo , o nulla . Eccone un' esempio semplice.

Sia l'iperbola equilatera BCF , (Fig. 31.) e posta $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$, abbiassi l'equazione $aa + xx = yy$, e differenziando , $x dx = y dy$. Quindi la sottotangente $ED = \frac{y dx}{dy} = \frac{yy}{x} = \frac{aa + xx}{x}$, e conseguentemente $ED - AD = \frac{aa + xx}{x} - x = \frac{aa}{x} = AE$.

Posta $x = 0$, si trova AE infinita , e la tangente

H 2

del

del punto B parallela all'asse AD ; e fatta $x = \infty$; si fa $AE = 0$. Per la qual cosa il punto E scorre tutta la AE infinitamente prodotta, e si ferma nella origine A , oltre cui non trascorre, quantunque la nostra curva volti il convesso all'asse. L'asintoto adunque AG nasce dal punto A , e forma con la linea delle assisse un'angolo semiretto, stante che nella equazione locale $ax + xx = yy$, posta $x = \infty$, svanisce la costante ax , e diventa $xx = yy$, o sia $x = y$.

43. Fino ad ora è stato da me supposto, che l'angolo delle coordinate sia retto. Che se egli sia ottuso, o acuto, poste come sopra $BC = x$, $CE = y$, $CD = dx$, $OG = dy$, (Fig. 32., e 33.) la sottotangente farà nè più nè meno $\frac{ydx}{dy}$, perchè faranno sempre simili

i due triangoli GEO , EAC ; ma l'altre formole avranno bisogno di riforma.

Nel triangolo EOG l'angolo O eguale all'angolo ACE si suppone noto, adunque dal punto G abbassata GI normale ad AD ; e prodotta, se fa bisogno, EO in H , nel triangolo GOH farà noto l'angolo GOH , ma l'angolo in H è retto, quindi noto l'angolo OGH , e però noto in specie il triangolo OGH , cioè data la ragione di GO a GH , e sia quella di a ad m , farà per tanto $a, m :: dy, GH = \frac{m dy}{a}$; farà pure data la ragione

di

di GO ad OH , e sia quella di a ad n , e però a ,
 $n :: dy$, $OH = \frac{ndy}{a}$; adunque $EH = dx \pm \frac{ndy}{a}$ (cioè il
 segno positivo nella Fig. 32., ed il negativo nella

Fig. 33.), quindi $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + nndy^2 + mmdy^2}{aa}$;

ma se OG si esprime per a , GH per m , OH per n ,
 farà $aa = mm + nn$, ed $aady^2 = mmdy^2 + nndy^2$, adunque

sostituito questo valore nell'espressione di $\overline{EG}^2$, farà
 $\overline{EG}^2 = \frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{aa}$, ed $EG = ds =$

$\sqrt{\frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a}}$, espressione dell'elemento della

curva. Ciò posto, per la similitudine de' triangoli
 EGO , AEC , farà GO , $GE :: EC$, EA , cioè dy ,

$\sqrt{\frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a}} :: y$, $EA = \frac{y}{dy} \sqrt{\frac{aadx^2 \pm 2andxdy + aady^2}{a}}$,

formola della tangente.

Sia TE normale alla curva, ed ES al diametro
 AI , per la similitudine de' triangoli GOH , ECS ,
 avremo $ES = \frac{my}{a}$, e $CS = \frac{ny}{a}$; e per la similitudine de'

triangoli GEH , EST , avremo EH , $HG :: ES$, ST ,
 cioè $\frac{adx \pm ndy}{a}$, $\frac{mdy}{a} :: \frac{my}{a}$, $ST = \frac{mmydy}{a \times adx \pm ndy}$,

c

$$\begin{aligned} \text{e però } CT &= \frac{mmydy}{a \times adx \pm ndy} \pm \frac{ny}{a} = \frac{mmydy + nnydy \pm anydx}{a \times adx \pm ndy} \\ &= \frac{aydy \pm nydx}{adx \pm ndy}, \text{ formola della sottotangente normale.} \end{aligned}$$

In simil modo si ridurranno l'altre formole, il che basterà d'aver indicato.

44. Ma le curve, delle quali si vogliono le tangenti, possono esser trascendenti, cioè non esprimibili da alcuna equazione algebrica, ma dipendenti dalla rettificazione d'altre curve non rettificabili. Sia la curva APB , (Fig. 34.) di cui si sappia condurre la tangente PTK ad un qualunque punto P , e prodotta in M la QP normale ad AQ , la relazione di MP all'arco PA sia espressa da un'equazione qualunque, e si ricerchi la tangente MT della curva CMA descritta da' punti M ; condotta qm infinitamente prossima a QM , ed MR parallela a PT , e supposto rettificabile l'arco AP , cioè $=x$, e chiamata $PM=y$, farà $Pp=dx$, $Rm=dy$, e simili i due triangoli mRM , MPT , e però mR , $RM::MP$, PT , cioè dy , $dx::y$, $PT=\frac{ydx}{dy}$, formola

la per la sottotangente della curva CMA da prenderfi sulla tangente della curva APB . Dall'equazione data della curva AMC si ritroverà il valore della dx , o dy da sostituirsi nella formola, e si farà il rimanente al solito.

ESEM-

E S E M P I O .

45. Mentre il circolo DPC si arruota uniformemente sulla retta AB cominciando dal punto A , (*Fig. 35.*) il punto C della sua periferia, che nel principio del moto cade sul punto A , lasci impressa nel piano la traccia del suo cammino, e si continovi questo moto fino a che pervenga di nuovo il punto C nella retta AB ; descriverà esso una curva ACB , la quale dalla sua generazione viene chiamata la *Cicloide*; e dicesi Cicloide ordinaria, quando il circolo si muova talmente sulla retta AB , che tutta l'abbia esattamente misurata colla sua periferia dopo, che il punto C da A sia giunto in B per modo, che sia AB eguale alla periferia dello stesso circolo. Dicesi Cicloide allungata quando il moto sia tale, che la retta AB sia maggiore della periferia del circolo; e finalmente Cicloide contratta quando la stessa AB sia minore della periferia.

Dalla descrizione di questa curva chiaramente si vede, che condotta da un qualunque punto la retta MQ parallela ad AB , avrà l'intercetta MP fra la curva, ed il circolo CPD all'arco CP quella ragione, che è la retta AB a tutto il circolo.

Ed in fatti sia il circolo generatore nelle due posizioni EMF , DPC ; condotte le corde ME , PD ,
poi-

poichè sono eguali gli archi EM , DP , faranno eguali, e parallele le corde EM , DP , e però sarà $MP=ED$; ma per la natura della curva è AE , $EM :: AD$, $EMF :: AB$, $EMFE$, e nella stessa ragione è pure ED ad MF ; ed $MF=PC$, $ED=MP$, dunque sarà $MP, PC :: AD, EMF :: AB, EMFE$. Se però si chiami la retta $AB=a$, la periferia $EMFE$ del circolo generatore $=b$, ed un qualunque arco CP per assissa $=x$, l'ordinata $PM=y$, farà l'equazione della curva cicloide $\frac{by}{a} = x$.

Avuta l'equazione alla curva, la differenzio, per ritrovare la sottotangente, e però $\frac{b dy}{a} = dx$, e sostituito questo valore in luogo di dx nella formola $\frac{y dx}{dy}$, sarà $PT = \frac{by}{a} = x$. Presa adunque sulla tangente PK (Fig. 34.)

del circolo, che si suppone condotta, una porzione PT eguale all'arco AP del circolo, e condotta al punto M la retta TM , essa sarà tangente della cicloide nel punto M .

Che se in oltre la cicloide sia l'ordinaria; poichè in questo caso si ha $b=a$, e però $y=x$, sarà $PM=PT$, e l'angolo $PTM=PMT$; ma l'angolo TPQ esterno è doppio dell'angolo TMP , e gl'angoli TPA , APQ (per la 32., e 29. prop. del 3. d'Euclide) sono eguali,

li, dunque farà l'angolo APQ eguale all'angolo TMP , e però la tangente MT parallela alla corda PA .

46. Senza supporre la tangente della curva APB (Fig. 34.) si potrà avere la sottotangente della curva AM presa nell'asse KAB . Sia $AQ = x$, $QP = y$, l'arco $AP = s$, $QM = z$, e la relazione dell'arco AP all'ordinata MP sia espressa da un'equazione qualunque. Sia qm infinitamente prossima alla QM , ed MS parallela ad AB , farà $MS = dx$, $Sm = dz$, e la similitudine de' triangoli mSM , MQN ci darà dz , $dx :: z$. $QN = \frac{zdx}{dz}$, formola per la sottotangente.

Se in luogo di assumere per ordinata $QM = z$, si prenda $PM = u$, condotta MR parallela all'archetto Pp , farà $mR = du$, $RS = po = dy$, e però $MS = du + dy$, ed i triangoli simili mSM , MQN ci daranno $du + dy$, $dx :: u + y$, $QN = \frac{u + y \times dx}{du + dy}$, altra formola della sottotangente.

E S E M P I O I.

47. Sia la curva APB (Fig. 34.) un circolo del diametro $= 2r$, e la ragione di PM all'arco PA sia quella di a alla b , cioè la curva AMC sia la cicloide. Chiamate $AQ = x$, $QP = y$, $QM = z$, l'arco $AP = s$,
Tm. II. I c

e condotta mq infinitamente prossima ad MQ , MR parallela a Pp ; MS , Po parallele ad AB , farà $mS = dz$, $RS = po = dy$, $Pp = ds$, ed mR differenza di MP farà $dz - dy$. Ma poichè, per la proprietà della curva, abbiamo MP all'arco PA , come a a b , nella stessa ragione faranno ancora i differenziali loro mR , pP ; e però farà $dz - dy$, $ds :: a$, b , cioè $\frac{ads}{b} = dz - dy$;

ma $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e per la proprietà del circolo $y = \sqrt{2rx - xx}$, dunque $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$, e $dy^2 = \frac{rrdx^2 - 2rxdx^2 + xxdx^2}{2rx - xx}$, quindi $ds = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$.

Surrogati per tanto questi valori in luogo di ds , e dy nell'equazione $\frac{ads}{b} = dz - dy$, avremo $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx - xx}}$, equazione differenziale della cicloide.

Sostituito adunque il valore di dz dato dall'equazione nella formola $\frac{zdx}{dz}$ della sottotangente, avremo

$$QN = \frac{bz\sqrt{2rx - xx}}{ar + br - bx}.$$

Che se la cicloide sia l'ordinaria, farà $a = b$, e però

però $QN = z \sqrt{\frac{2rx - xx}{2r - x}}$, cioè $2r - x, \sqrt{2rx - xx} :: z,$

QN , o sia $2r - x, y :: z, QN$; ma per la proprietà del circolo è $2r - x, y :: y, x$, adunque farà $y, x :: z, QN$, cioè $QP, QA :: QM, QN$, e però farà MN parallela a PA .

ESEMPIO II.

48. Sia la curva APB una parabola, la di cui equazione $px = yy$, polte $AQ = x, QP = y$, e sia l'arco $AP = s, PM = u$, e la ragione di MP all'arco PA sia quella di a alla b , farà pure $mR, Pp :: a, b$; cioè $du, ds :: a, b$, e però $\frac{ads}{b} = du$. Ma nella parabola $y = \sqrt{px}$, e $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, dunque $ds =$

$\frac{dx \sqrt{4px + pp}}{2\sqrt{px}}$; quindi surrogato questo valore in luogo

di ds nell'equazione $\frac{ads}{b} = du$, l'equazione alla curva.

AMC farà $\frac{adx \sqrt{4px + pp}}{2b\sqrt{px}} = du$. Prefa per tanto la

formola della sottotangente $\frac{u + y \times dx}{du + dy}$, che a questo

I 2

caso

caso conviene, e fatte le sostituzioni in luogo di du , e dy farà $QN = \frac{u+y \times 2b \sqrt{px}}{a \sqrt{4px+pp+bp}}$; ma $y = \sqrt{px}$, per

la proprietà della curva APB , ed $\frac{as}{b} = u$, per la proprietà della curva AMC ; dunque $QN = \frac{2as \sqrt{px} + 2bpx}{a \sqrt{pp+4px+bp}}$.

49. Dal diverso modo, con cui molte curve si generano, nascono diverse dalle ritrovate le formole delle sototangenti loro, benchè il metodo per ritrovarle sia simile. Basterà il ricercarle in alcune per fare idea della maniera, e dell'artificio, che dee usarsi in qualunque incontro; e però date le due curve AQC , BCN (Fig. 36.) al comune diametro TF , alle quali si sappiano condurre le tangenti, sia un'altra curva MC tale, che la relazione delle ordinate PQ , PM , PN rispetto ad un qualunque punto M sia espressa da una qual si sia equazione, e si dimandi la tangente MT di un qualunque punto M . Si conduca pS infinitamente prossima a PN , e le NS , MR , QO parallele ad AB , e sia $PE = s$, $PF = t$, cognite per la supposizione, $PQ = x$, $PM = y$, $PN = z$. Per la similitudine de' triangoli QPE , qOQ , farà $QO = \frac{sdx}{x} = MR = NS$, e per la similitudine de' triangoli mRM , MPT , fa-

rà

rà $PT = \frac{sydx}{x \cdot y}$, formola della sottotangente; ma perchè

differenziando l'equazione della curva MC , a fine di avere il valore della dx da sostituirsi in essa formola, farà egli dato per dy , e dz , non si avrà essa sottotangente in termini finiti. Si rifletta adunque, che i triangoli simili NSn , NPF ci danno NP , $PF :: nS$, SN , cioè z , $t :: \pm dz$, $SN = \pm \frac{tdz}{z}$ (cioè il segno positi-

vo alla dz , se crescendo x , ed y , cresce la z ; ed il segno negativo, se crescendo x , ed y , la z cala). Ma è anco $SN = \frac{sdx}{x}$, dunque $\pm \frac{tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$, e però

$dz = \pm \frac{szdx}{sx}$. Posto adunque in luogo di dz questo va-

lore nell'equazione differenziata della curva MC , si avrà un valore di dx dato per dy , il quale sostituito nella formola della sottotangente $\frac{sydx}{x \cdot y}$ farà svanire le

differenze, e la sottotangente sarà espressa in termini finiti.

ESEMPIO I.

50. Sia $xz = yy$ l'equazione della curva MC ; differenziando farà $zdx + xdz = 2ydy$, e sostituito in luogo di dz il valore $\pm \frac{szdx}{sx}$, farà $zdx \pm \frac{szdx}{s} = 2ydy$,

c

e però $dx = \frac{2tydy}{tz \pm sz}$; nella formola della sottotangente

$\frac{sydx}{x dy}$ surrogato per tanto, in luogo di dx , questo valore, sarà $PT = \frac{2sty}{tzx \pm szx} = \frac{2st}{t \pm s}$, quando si ponga

in vece di yy il valore xz . Sia ora la curva AQC una parabola del parametro $= b$; la curva BCN un circolo del diametro $AB = 2a$. Se adunque il punto N cade nella periferia del primo quadrante principiando da A , in cui la dz è positiva, la formola della sottotangente PT sarà $\frac{2st}{t+s}$, e la sottotangente del circolo sarà

$\frac{2aq - qq}{a - q} = t$ (chiamata $AP = q$), e quella della para-

bola sarà $2q = s$; posti adunque questi valori in luogo di t , e di s nell'espressione $\frac{2st}{t+s}$, avremo $PT =$

$$\frac{8aq - 4qq}{4a - 3q}$$

Che se il punto N cade nella periferia dell'altro quadrante, sarà dz negativa, e la formola della sottotangente PT sarà $\frac{2st}{t-s}$; ma in questo caso la sotto-

tangente del circolo è $\frac{2aq - qq}{q - a} = t$, e della parabola

rimane

rimane $2q = s$, e però fatte le sostituzioni de' valori di s , e di s nell'espressione $\frac{2st}{t-s}$, avremo $PT = \frac{83q - 477}{47 - 3q}$,

come nel primo caso.

52. Ma quando siasi denominata AP , essendo AQ una parabola, sarà $PQ = x = \sqrt{bq}$; ed essendo BCN un circolo, sarà $PN = z = \sqrt{2aq - qq}$, adunque l'equazione $yy = zx$ della curva MC sarà $yy = q \sqrt{2ab - bq}$, e data così l'equazione per le due coordinate AP, PM , troverassi la sottotangente PT con le solite ordinarie formule $\frac{y dq}{dy}$. Differenziando adunque l'equazione $yy =$

$q \sqrt{2ab - bq}$, sarà $y dy = \frac{qab dq - 3bq dq}{4 \sqrt{2ab - bq}}$; quindi multi-

plicando per y il numeratore, e denominatore della formula $\frac{y dq}{dy}$, onde sia $\frac{yy dq}{y dy}$, e sostituendo in luogo di yy , e di $y dy$ i rispettivi valori, sarà $\frac{yy dq}{y dy} = \frac{8aq - 4qq}{4a - 3q} =$

PT , come prima.

53. Sia più generalmente $x^m z^n = y^{m+n}$ l'equazione della curva MC , differenziando sarà $mz^n x^{m-1} dx + nx^m z^{n-1} dz = (m+n) \times y^{m+n-1} dy$, e ponendo in

luogo

luogo di dz il valore $\pm \frac{szdx}{sx}$, farà

$$\frac{tmz^n x^{m-1} dx \pm snx^{m-1} z^n dx}{s} = \overline{m+n} \times y^{m+n-1} dy,$$

e però $dx = \frac{mt + nt \times y^{m+n-1} dy}{mt \pm ns \times z^n x^{m-1}}$; adunque $PT =$

$$\frac{sydx}{x dy} = \frac{mst + nst \times y^{m+n}}{mt \pm ns \times z^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt \pm ns}, \text{ quando si ponga}$$

in luogo di y^{m+n} il valore $x^m z^n$.

54. Se le due curve AC , BCN diverranno linee rette, nel caso dell'equazione semplice $xz = yy$ della curva MC farà essa una delle Sezioni Coniche d'Apollonio, come si è veduto al Lib. I. Cap. III. num. 135., cioè un'Ellissi quando l'ordinata CD cade fra i punti A , B ; un'Iperbola quando cade dall'una, o dall'altra parte; ed in fine una Parabola quando i punti A , B sono infinitamente lontani l'uno dall'altro, cioè quando l'una delle rette linee AC , BC è parallela al diametro. Da ciò manifestamente si vede, che nelle stesse circostanze saranno le medesime curve coniche, ma di grado superiore in infinito, quando l'equazione alla curva MC sia la generale $x^m z^n = y^{m+n}$.

55. Data la curva AP (Fig. 37.) con l'origine in A , di cui si sappia condurre la tangente, sia un'altra curva CMD tale, che condotta da un punto dato

F

F la retta *FMP* in qualunque modo, la relazione di *FM* alla porzione *AP* sia espressa da un'equazione qualunque, e debbasi ritrovare la tangente della curva *CMD*.

Sia *PH* tangente della curva *APB* nel punto *P*, e si conduca *FH* normale ad *FP*, ed *Fp* infinitamente prossima, e col centro *F* si descrivano gl'archetti infinitesimi *MR*, *PO*, e la ricercata tangente della curva *CMD* sia *MT*. Si chiamino $PH=t$, $FH=s$, $FM=y$, $FP=z$, e l'arco $AP=x$. Poichè per gl'archi infinitesimi possono assumersi i loro seni retti, sarà il triangolo *MRm* rettangolo in *R*, e perchè l'angolo *MmR* non è diverso dall'angolo *TMF*, se non per l'angolo infinitesimo *MFm*, si potranno considerare simili i due triangoli *MRm*, *TFM*, e per la stessa ragione simili i due triangoli *POp*, *HFP*; adunque sarà $mR, RM::MF, FT$, cioè $dy, MR::y, FT$, ed $FT = \frac{MR \times y}{dy}$, onde per avere il valore di *FT* con-

viene avere prima quello di *MR*, che si averebbe, se fosse nota *PO*; ma per i triangoli simili *PFH*, *POp*, sarà $PH, FH::Pp, PO$, cioè $t, s::dx, OP = \frac{sdx}{t}$,

e per i settori simili *FPO*, *FMR*, sarà $FP, PO::FM, MR$, cioè $z, \frac{sdx}{t}::y, MR = \frac{sydx}{zt}$, quindi $FT = \frac{sydy}{t}$,

formola della sottotangente; la quale, se si sostituisc-

luogo di dx il valore dato dall'equazione differenziata della curva CMD , farà espressa in termini finiti.

ESEMPIO I.

56. Sia il circolo $ABCD$ (Fig. 38.) del centro H , raggio HA , e mentre il raggio HA fisso nel centro si muove uniformemente, descrivendo il punto A la periferia $ABCD$, si muova il punto H uniformemente sul raggio HA in modo, che restitutosi il raggio nella prima situazione HA il punto H abbia percorso tutto il raggio, e sia in A ; descriverà il punto H la curva $HEcA$, che diceſi la *Spirale d'Archimede*. Dalla generazione di queſta curva è facile a vedere, che un qualunque arco AB del circolo farà alla corriſpondente porzione HE del raggio, come tutto il circolo a tutto il raggio. Chiamato adunque il raggio $= r$, la periferia del circolo $= c$, l'arco $AB = x$, e l'ordinata $HE = y$, farà $x, y :: c, r$, e però $y = \frac{rx}{c}$, equazione

della ſpirale, in cui le ordinate ſono dal punto fiſſo H . Ciò premeſſo, ſi voglia la tangente ET della ſpirale: poichè in queſto caſo la FP della Fig. 37. è il raggio HB del circolo, farà $z = r$, e le due, PH tangente, ed FH ſottotangente, nella ſteſſa Fig. 37. ſono in queſta ambedue perpendicolari al raggio HB (per la natura

natura del circolo), ed in conseguenza tra loro parallele, e però eguali; onde sarà $s = r$, adunque la formola generale $\frac{yydx}{sdy}$ sarà in questo caso $\frac{yydx}{r dy}$; quindi

differenziando l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, sarà $dy = \frac{r dx}{c}$, e so-

stituito nella formola il valore di dx , sarà essa $\frac{cyy}{r} = HT$; o pure posto in luogo di y il valore $\frac{rx}{c}$, sarà $\frac{xy}{r} = HT$. Descritto adunque col centro H , rag-

gio $HE = y$ l'arco EQ , e presa HT eguale all'arco EQ , sarà essa la sottotangente, perchè per la similitudine de' settori HEQ , HBA , sarà HA , $AB :: HQ$, QE ; cioè r , $x :: y$, $QE = \frac{xy}{r}$.

Se in luogo di essere l'equazione $y = \frac{rx}{c}$, sia $y^m = \frac{r^m x}{c}$, cioè la periferia all'arco AB , come una

qualunque potestà m intiera, o rotta del raggio ad egual potestà dell'ordinata, differenziata l'equazione, ci darà $dx = \frac{mcy^{m-1} dy}{r^m}$, ed $ydx = \frac{mcy^m dy}{r^m}$; e fatta la sostitu-

zione nella formola $\frac{yydx}{r dy}$ della sottotangente, sarà essa

$$\frac{mcy^{m+1}}{r^{m+1}} = HT, \text{ ma } y^m = \frac{r^m x}{c}, \text{ dunque } \frac{mxy}{r} = HT =$$

$$m \times EQ.$$

K 2

57.

57. Più semplice si averà la formola della sottotangente, se l'equazione della curva APB (Fig. 37.) sia data dalla relazione di FM ad FP ; poichè i triangoli simili POP , PFH , ci danno $PO = \frac{sdz}{z}$, ed i settori simili FPO , FMR ci danno $MR = \frac{sydz}{zz}$, e finalmente i triangoli simili MRm , TFM ci daranno $FT = \frac{syydz}{zzdy}$.

E S E M P I O II.

58. Sia la curva CMD al di sopra di APB , il che non fa alcuna alterazione (Fig. 39.), ed APB sia una retta linea, ed FM , FP sieno sempre diverse fra loro per la stessa quantità, cioè PM costante $= a$, sarà $y - z = a$ l'equazione della curva, che è la Concoide di Nicomede, il di cui polo F , ed AB l'asintoto. Differenziando l'equazione, farà $dy = dz$, quindi la sottotangente $FT = \frac{syy}{zz}$.

Condotta adunque ME parallela a PA , ed MT parallela a PE , farà MT tangente della curva in M ; imperciocchè farà $FA = s$, $FE = \frac{sy}{z}$, ed $FT = \frac{syy}{zz}$.

59. Data all'asse EAT la curva qualunque AM , (Fig. 40.) di cui si sappia condurre la tangente MH ad un qualunque punto M , e dato fuori della curva il punto F , da cui sia condotta la retta FPM ; se s'immagineremo, che

che aggirandosi la retta FPM sul punto F immobile, faccia muovere sulla retta ET il piano PAM sempre parallelo a se stesso, rimanendo la intercetta PA sempre la stessa: il punto M , che è la comune intersecazione delle due linee FM , AM , descriverà con questo moto una curva CMD , di cui si domanda la tangente. Si muova il piano PAM , e nel primo istante arrivi nella posizione infinitamente prossima pam ; e si conduca SRm parallela ad ET . La similitudine de' triangoli MRm , MHT ci darebbe la retta HT , che determina la tangente ricercata, se fossero noti i lati MR , Rm . Per averli adunque, chiamata FP , o $Fp = x$; FM , o $Fm = y$, $Pp = dz$, e le note $PA = a$, $MH = t$, $PH = s$; egli è chiaro, che sarà $Pp = Aa = Rm = dz$, e per i triangoli simili Fpp , FSm sarà $Fp, Pp :: Fm, Sm$, cioè $x, dz :: y, Sm = \frac{ydz}{x}$, dunque $SR = \frac{ydz - xtz}{x}$;

e per i triangoli simili MPH , MSR , sarà $HP, HM :: RS, RM$, cioè $s, t :: \frac{ydz - xtz}{x}, MR = \frac{tydz - txdz}{sx}$;

finalmente, per i triangoli simili MRm , MHT , sarà $MR, Rm :: MH, HT$, cioè $\frac{tydz - txdz}{sx}, dz :: t, Ht = \frac{sx}{y-x}$.

Dal punto F si conduca FE parallela alla tangente MH , e si prenda $HT = PE$, tirata TM , sarà essa tangente della curva nel punto M . Imperocchè per i triangoli simili PMH , PFE , sarà $PM, PH :: PF, PE$, cioè $y - x, s :: x, \frac{sx}{y-x} = PE = HT$.

60. E' stato dimostrato al num. 136. Cap. III. Lib. I. che se la linea AM fosse una retta, la curva CMD sarebbe l'iperbola, che averebbe ET per uno de' due asintoti. Se AM fosse un circolo col centro P , la curva CMD sarebbe la Concoide di Nicomede, il di cui polo F , e l'asintoto ET . E se finalmente AM fosse una parabola, la curva CMD sarebbe la Compagna della Paraboloidi di Cartesio, cioè una delle due Concoide Paraboliche.

61. Al diametro AP (Fig. 41.) sia una curva qualunque AN , a cui si sappia condurre la tangente, ed un punto fisso F fuori di lei, e sia un' altra curva CMD tale, che condotta, come si vuole, dal punto F la retta $FMPN$, la relazione tra FN , FP , ed FM sia espressa da un' equazione qualunque; si dimanda la tangente MT di un qualunque dato punto M .

Per lo punto F si conduca HK perpendicolare ad FN , che incontra in K il diametro AP prodotto, ed in H la tangente data NH . Sia FQ infinitamente prossima ad FN , e col centro F si descrivano gl'archi MR , Po , NQ . Chiamate $FK = s$, $FH = t$, $FP = x$, $FM = y$, $FN = z$, sarà $mR = dy$, $po = dx$, $Qn = -dz$, e per la similitudine de' triangoli NQn , NFH , sarà $NQ = -\frac{tdz}{z}$; e per la similitudine de' settori FNQ , FMR , sarà $MR = -\frac{tydz}{xz}$; e finalmente, per la simi-

litu-

litudine de' triangoli MRm , MFT , sarà $FT = -\frac{yytdz}{zz-y}$,

formola ricercata della sottotangente. Ma quì pure si rifletta, che differenziando l'equazione della curva, il valore di dy da sostituirsi nella formola sarà dato per dx , e dz , quindi non spariranno i differenziali; tuttavia però la similitudine de' settori FNQ , FPO ci darà $PO = -\frac{txdz}{zz}$, e la similitudine de' triangoli Pop , PFK

l'analogia dx , $-\frac{txdz}{zz} :: x$, s , quindi l'equazione $szzdx = -txxdz$, e però $-dz = \frac{szzdx}{txx}$; posto adun-

que nella formola della sottotangente il valore di dy , cavato dall'equazione differenziata della curva, indi in luogo di dz questo valore, spariranno le differenze, e si averà la sottotangente in termini finiti.

Se la linea AP in luogo di esser retta fosse una curva, condotta la tangente PK , col medesimo discorso si troverebbe lo stesso valore della sottotangente FT .

ESEMPIO.

62. La curva AN (Fig. 42.) sia un circolo, il quale passi per lo punto F , ed in tal modo posto, che conducendo dal puto F la FB normale ad AP prodotta, essa passi per lo centro G di esso circolo, e sia fem-

sempre PN eguale a PM , la curva CMD della Figura antecedente, cioè FMA in questa sarà la Cissoide di Diocle, la di cui equazione sarà $z + y = 2x$. Differenziando adunque avremo $dz + dy = 2dx$, e però $dy = 2dx - dz$, e posto in luogo di dy questo valore nella formola $-\frac{yytdz}{zzdy}$ della sottotangente, farà

$-\frac{yytdz}{zzdy}$, e finalmente surrogato in luogo di $-dz$

il valore $\frac{szdz}{txx}$, avremo $\frac{styy}{2txx + 1zz} = FT$, sottotan-

gente ricercata.

Egli è chiaro, che se il punto M , di cui si vuole la tangente, cadesse nel punto A , essendo in questo caso KH normale ad FA , farebbe $FN = FP = FM = FA = FK = FH$; e però $FT = \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}AF$.

63. Troverassi forse più speditamente la sottotangente della Cissoide per mezzo della solita formola del num. 30.; poichè, condotte le NE , ML perpendicolari ad FB , e chiamando $FB = 2a$, $FL = x$, $LM = y$, per la proprietà della curva FMA sarà $BE = FL = x$, e per la proprietà del circolo, sarà $EN = \sqrt{2ax - xx}$, ed i triangoli simili FLM , FEN daranno FL , $LM :: FE$, EN , e però FL , $LM :: EN$, EB , cioè x , $y :: \sqrt{2ax - xx}$, x ; quindi $y = \frac{xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, o

sia

sia $yy = \frac{x^3}{2a-x}$, equazione della curva FMA ; differen-

ziando adunque avremo $2ydy = \frac{3axx dx - 2x^3 dx}{2a-x}$, e

presa la formola solita $\frac{ydx}{dy}$, e fatte tutte le sostituzioni,

farà $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy \times \frac{3ax - x^2}{3ax - x^2}}{3ax - x^2} = LO = \frac{2ax - xx}{3a - x}$, se si pon-
ga in luogo di yy il valore $\frac{x^3}{2a-x}$.

64. Sieno due curve ANB , CPD , (Fig. 43.) ed una retta FK , ed in esse tre punti fissi A , C , F ; sia in oltre la curva EMG tale, che, condotta per un qualunque punto M di essa la retta FMN dal dato punto F , e dal punto M la retta MP parallela ad FK , la relazione dell'arco AN all'arco CP venga espressa da un'equazione qualunque. Si dimanda la tangente della curva EG nel punto M .

Sia MT la ricercata tangente, che incontri in T la retta FK prodotta, se fa bisogno, e dal punto T si tiri TH parallela ad FM , e per lo punto M si conducano MRK parallela alla tangente in P , ed MOH parallela alla tangente in N , e sia $FmOn$ infinitamente prossima ad FN . Chiamate $FM=s$, $FN=r$, $MK=u$, e gli archi $AN=y$, $CP=x$, e però $Nn=dy$, $Pp=dx$, farà per i triangoli simili FNn , FMO , FN , $Nn::FM$,
MO,

Tom. II.

L

MO , cioè t , $dy :: s$, $MO = \frac{sdy}{t}$, e per i triangoli si-

mili MmR , MTK ; ed MOm , MHT , farà MR ,
 $Mm :: MK$, MT ; ed Mm , $MO :: MT$, MH ; dunque
 farà anche MR , $MO :: MK$, MH , cioè dx , $\frac{sdy}{t} :: u$,

$MH = \frac{usdy}{tdx}$. Quindi differenziando l'equazione data,

avremo il valore di dy dato per dx , e fatta la sostituzione, farà MH espressa in termini finiti. Presa adunque MH eguale al ritrovato valore, e parallela alla tangente in N della curva ANB , e condotta HT parallela ad MF , se dal punto M si tirerà al punto T la retta TM , farà essa tangente nel punto M della curva EMG .

E S E M P I O .

65. La curva ANB (Fig. 44.) sia un quarto di circolo, il di cui centro F , e CPD della Fig. 43. sia il raggio APF della Fig. 44. perpendicolare alla retta $FKTB$, e si conduca la tangente AR . S'intenda aggirarsi equabilmente il raggio FA intorno al centro F , e nello stesso tempo muoversi equabilmente la tangente AR sempre parallela a se stessa verso FB in modo, che quando il raggio FA cade in FB , cada pure in FB la tangente AR . Con questo moto il punto M , che è la intersecazione del raggio, e della tangente, descriverà la curva AMG , che chiamasi la *Quadratrice di Dinostrato*.
 Dalla

Dalla generazione di questa curva è chiaro, che sarà l'arco AN all'intercetta AP , come il quadrante AB al raggio AF ; chiamando dunque $AN = y$, $AP = x$, $AB = a$, $AF = r$, sarà $ry = ax$, e $dy = \frac{adx}{r}$,

dunque sostituendo questo valore di dy nella formola $\frac{u dy}{dx}$,

sarà $MH = \frac{asu}{r}$; ma in questo caso FN è il raggio del

circolo, ed $MK = AF - AP$, dunque $t = r$, $u = r - x$, quindi $MH = \frac{asr}{r} - \frac{asx}{r} = \frac{as}{r} - sy$, posto in luogo di

ax il valore ry dato dall'equazione. Dal punto M si alzi MH normale ad FM , ed eguale all'arco MQ descritto col centro F , raggio FM , e si tiri HT parallela ad FM , sarà MT tangente della quadratrice nel punto M ; imperocchè, per i settori simili FNB , FMQ , sarà FN , $NB :: FM$, MQ , cioè r , $a - y :: t$, $MQ = \frac{as - sy}{r} = MH$.

66. Sieno due curve BN , FQ , (Fig. 45.) delle quali si sappiano condurre le tangenti, e che abbiano per asse comune la retta BA , in cui sieno due punti fissi A , E , e sia un'altra curva LM tale, che condotta per un qualunque punto M di essa la retta AMN ; e descritto col centro A , raggio AM , l'arco MG ; e dal punto G abbassata GQ normale ad AG , sia data la re-

lazione de' spazj ANB , $EFQG$, e delle linee AM , AN , QG per mezzo di un' equazione qualunque. Si ricerca la tangente della curva LM nel punto M .

Condotta la retta ATH perpendicolare ad AMN , sia un'altra Amn infinitamente prossima ad AMN , e l'arco (mg) , e la perpendicolare (gq) , quindi col centro A descritto l'archetto NS , si chiamino le sottotangenti date $HA=a$, $GK=b$, e sia $AM=y$, $AN=z$, $GQ=u$, e gli spazj $EGQF=s$, $ANB=t$, farà $Rm=Gg=dy$, $Sn=dz$, ed a cagione de' triangoli simili KGQ , Qog , farà $(og)=-du=\frac{udy}{b}$, e per i triangoli simili HAN ,

NSn , farà $SN=\frac{adz}{z}$. Lo spazio $GQgg$ si può pren-

dere per lo spazio $GQog$, perchè la differenza loro Qog è quantità infinitesima del secondo ordine, onde farà $GQgg=udy=-ds$; così pure farà $ANn=\frac{1}{z}AN \times NS=\frac{1}{z}adz=-dt$. Sostituiti per tanto nella differenza dell'equazione proposta, in luogo di du , ds , dt , questi valori, avremo un' equazione, da cui si caverà il valore di dz dato per dy . Ora per i settori simili ARM , ANS , farà $MR=\frac{aydz}{zz}$, e per i

triangoli simili mRM , MAT , farà $AT=\frac{aydy}{zz}$, for-

mola della sottotangente, in cui se si sostituirà, in luogo di dz , il valore dato per dy dall'equazione della

curva,

curva, spariranno le differenze, e la sottotangente sarà data in termini finiti.

E S E M P I O .

67. Lo spazio $EGQF$ sia doppio di ABN , cioè $s = 2t$, sarà $ds = 2dt$, ma $ds = -u dy$, e $dt = -\frac{1}{2}adz$, dunque sarà $udy = adz$, e $dz = \frac{u dy}{a}$, dunque la sottotangente $AT = \frac{uyy}{2z}$.

La curva BN sia un circolo del centro A , raggio $AN = c$, quindi $z = c$, e la curva FQ sia un'iperbola dell'equazione $uy = ff$, sarà la sottotangente $AT = \frac{ff y}{cc}$,

cioè la ragione di AM ad AT costante. La curva LM (Fig. 46.) chiamasi in questo caso la *Logaritmica spirale*.

E' chiaro, che la curva LM farà infiniti giri prima di giungere nel punto A ; imperocchè quando il punto G (Fig. 45.) arriva in A , lo spazio s sarà infinito, come vedrassi nel calcolo integrale, dunque dovrà essere infinito anche lo spazio t , che non può esserlo, se non dopo infiniti giri del raggio AM .

68. Rimane per ultimo da considerarsi un caso particolare delle tangenti. Si è veduto, che essendo le coordinate di una curva qualunque x , ed y , la formula generale della sottotangente è $\frac{y dx}{dy}$, o $\frac{x dy}{dx}$, secon-

do

do che la y , o la x fa figura di ordinata ; e però, differenziata l'equazione della curva, se da essa si ricavi il valore della dx , o della dy , questo valore surrogato nella formola generale ci somministra una frazione in termini tutti finiti, la quale è l'espressione, o valore della sottotangente per un qualunque punto della proposta curva. Che se si vuole la sottotangente per un determinato punto della curva, niente altro si deve fare, che sostituire nella frazione in luogo delle x , ed y i valori, che esse hanno nel dato punto. Ma accade alcuna volta, che sostituendo in luogo di x , o di y un determinato valore nella frazione, che esprime la sottotangente, o sia nel rapporto della dx alla dy cavato dall'equazione differenziata della curva, tutti i termini nel numeratore, e denominatore di esso svaniscano, e così ne provenga $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, e però anco la sottotangente $= \frac{0}{0}$, dal che però non si deve inferire, che essa

sia nulla in quel punto.

Sia per un'esempio la curva

$$y^4 - 8ay^3 - 12axy^2 + 16a^2xy + 48a^2xy + 41axx - 64a^3x = 0,$$

e sia y l'assissa, x l'ordinata, e però $\frac{xdy}{dx}$ la formola

della sottotangente. Differenziando adunque l'equazione, avremo $\frac{dy}{dx} = \frac{3ayy - 12a^2y - 2aax + 16a^3}{y^3 - 6aay - 6axy + 8a^2y + 12aax}$, e la sot-

totan-

$$\text{tangentente } \frac{xdy}{dx} = \frac{3axy - 12aaxy - 2aaxx + 16a^3x}{y^3 - 6axy - 6axy + 8axy + 12aax}$$

ma se si vuole la sottotangente di quel punto di curva, a cui corrisponde l'assissa $y = 2a$, essendo in questo caso, per la data equazione, anche $x = 2a$, fatte le sostituzioni nella frazione, che esprime il rapporto della dx alla dy , si trova egli essere $\frac{12a^3 - 24a^3 - 4a^3 + 16a^3}{8a^3 - 24a^3 - 24a^3 + 16a^3 + 24a^3}$,

cioè $\frac{0}{0}$, perchè tutti i termini si distruggono, e però

anco la sottotangente in quel punto $= \frac{0}{0}$, il che nulla ci

fa sapere, quantunque allo stesso punto corrisponda benissimo la sottotangente, anzi due.

69. Accaderà infallibilmente questo caso ogni qual volta la curva abbia più rami, che s'incontrino, e si voglia la tangente nel punto del concorso; ed in fatti la curva $NO PQR$ (Fig. 47.) dell'equazione proposta à i due rami OP , MQ , che si tagliano nel punto G , a cui appunto corrisponde $y = 2a$, essendo OT l'asse delle y , ed il principio in O , ed $x = 2a$, prese le x nell'asse OQ .

Per rendere ragione di questo caso, basta avvertire due cose: la prima, che nel punto del concorso di diversi rami di curva diverse radici dell'equazione si fanno eguali tra loro; così rispetto alla proposta equazione

ne nel punto G sono eguali i due valori della x , e due pure sono eguali de' quattro valori della y ; la seconda, (come si è dimostrato nell'Algebra Cartesiana) che se un'equazione, la quale contenga delle radici eguali, si moltiplicherà termine per termine con una serie aritmetica qualunque, il prodotto sarà eguale al zero, e conterrà in se una meno delle radici eguali; se questo prodotto si moltiplicherà pure per una serie aritmetica, il nuovo prodotto sarà istessamente eguale al zero, e conterrà una meno delle radici eguali, che contiene il primo prodotto, cioè due radici meno delle eguali, che contiene la prima equazione, e così successivamente fino a quel prodotto, che una sola contenga delle radici eguali.

Se adunque un'equazione qualunque di curva, trattando x per variabile, ed y per costante, si moltiplicherà per una serie aritmetica, la quale termini nel zero; nel caso di radici eguali il prodotto sarà eguale al zero, e lo sarà ancora, se si divida esso prodotto per x , la qual divisione succede dal moltiplicarsi per zero l'ultimo termine. Lo stesso sarà, trattando y per variabile, ed x per costante, e moltiplicando l'equazione per tale serie aritmetica, che ponga il zero sotto l'ultimo termine.

Ciò posto, è facile a vederfi, che questa tale operazione si fa appunto differenziando, cioè si tratta la x ,
come

come variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della x , e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dx ; indi si tratta y per variabile, e si moltiplica l'equazione per una serie aritmetica, il di cui primo termine è il massimo esponente della y , e l'ultimo è il zero, e nasce un prodotto moltiplicato in dy ; ma nel caso di radici eguali di x , e di radici eguali di y , tanto il prodotto, che moltiplica dx , quanto quello, che moltiplica dy , sono zero; dunque appunto deve nascere la ragione di $\frac{dx}{dy} = 0$ in quel punto, nel quale

due rami di curva s'incontrano.

Per vedere ciò chiaramente, ordino l'equazione della proposta curva per la lettera y , e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine sia zero.

$$y^4 - 8ay^3 + 12axy^2 + 48a^2xy + 4a^3xx = 0,$$

$$4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$

il prodotto farà

$$4y^4 - 24y^3 + 24axy + 32a^2xy + 48a^3xy = 0,$$

cioè dividendo per $4y$

$$y^3 - 6ay^2 + 6axy + 8a^2x + 12a^3x = 0.$$

Ordino la stessa equazione per la lettera x , e la moltiplico per la serie aritmetica, il di cui ultimo termine

Tom. II.

M

sia

sia zero

$$\begin{array}{r} 4aaxx + 48aaxy + y^4 \\ - 64x^3 - 8ay^3 \\ - 12ayyx + 16aayy \\ \hline 2, \quad 1, \quad 0 \end{array} = 0,$$

il prodotto farà

$$8aaxx + 48aaxy - 64x^3 - 12ayyx = 0,$$

cioè dividendo per $4x$

$$2aax + 12aay - 16x^2 - 3ayy = 0.$$

Ciò fatto, differenzio l'equazione proposta, ed il differenziale si è $4y^3 dy - 24xyy dy - 24axy dy - 12ayy dx + 32aay dy + 48aax dy + 48aay dx + 8aax dx - 64x^2 dx = 0$, cioè dividendo per 4, e trasportando i termini della dx

$$\begin{array}{l} y^3 - 6ayy - 6axy + 8aay + 12aax \times dy = \\ 3ayy - 12aay - 2aax + 16x^2 \times dx. \end{array}$$

Ma il moltiplicatore della dy è il primo prodotto nella serie aritmetica, ed in conseguenza $= 0$ relativamente al punto G , in cui y à due valori eguali; ed il moltiplicatore della dx è il secondo prodotto nella sua serie aritmetica, mutati i segni, il che però non fa, che non sia $= 0$ relativamente allo stesso punto G , in cui x à due valori eguali, dunque farà $dy \times 0 = dx \times 0$, cioè $\frac{dy}{dx} = 0$ nel punto G .

Ma se il moltiplicare qualunque equazione per una serie aritmetica, o sia il differenziarla (giacchè è lo stesso)

fa,

fa, che nel supposto di radici eguali nasca il caso, di cui si tratta, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, fa ancora, che nell' equazione

indi nata vi sia una meno delle radici eguali, e però se l'equazione proposta à due radici eguali, la differenziata ne avrà una sola di esse eguali; se la proposta ne averà tre, differenziando di nuovo la già differenziata, (assumendo per costanti le flussioni dx , dy) quella, che indi nasce, ne averà una sola, e così di mano in mano discorrendo. Si assumono poi per costanti le flussioni dx , dy , perchè distruggendosi vicendevolmente tanto i termini moltiplicati in dx , quanto quelli moltiplicati in dy , nella supposizione di quel tale determinato valore della x , e della y , si distruggeranno nullameno sì i termini moltiplicati in ddx , come quelli moltiplicati in ddy . In questo modo operando si ridurranno le equazioni a non contenere, che una sola di quelle molte radici eguali, che prima avevano; e però differenziando finalmente l'ultima, per ritrarne la ragione di dy alla dx , non potrà più nascere il caso di $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$.

Ripiglio adunque l'equazione di prima

$$y^4 - 8xy^3 - 12xy^2y + 16xy^2y + 48axy + 42axx - 64x^2x = 0,$$

differenziata si trova essere

$$y^4 dy - 6xy^2 dy - 6axy dy - 3ayy dx + 8aay dy + 12aax dy + 12aay dx + 2aax dx - 16a^2 dx = 0.$$

Ma poichè sostituendo in luogo di y il valore $2a$, ed il corrispondente in luogo di x , che è pure $2a$, a fine di avere la tangente del punto G , ritrovo $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$,

passo a differenziare la già differenziata, prendendo sempre per costanti le flussioni dx , dy , e ricavo $3yydy^2 - 12aydy^2 - 6axy^2 + 8aady^2 - 12nydydx + 24aadxdy + 2aadx^2 = 0$.

Sostituisco in luogo di y , e di x il valore $2a$ relativamente al punto G , e trovo $dx = \pm dy \sqrt{8}$, indi nella formola generale della sottotangente $\frac{xydy}{dx}$ posti i

valori di $x = 2a$, e di $dx = \pm dy \sqrt{8}$, sarà finalmente $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ la sottotangente, o per meglio dire, le due sot-

totangenti, che corrispondono al punto G , una positiva, l'altra negativa, ed eguale alla positiva.

Se la curva averà tre radici eguali nel punto, di cui si vuole la tangente, cioè se la curva averà tre rami, che in quel punto s'incontrino; poichè dopo averla la prima volta differenziata averà ancora due radici eguali, differenziata di nuovo, a fine di avere la ragione di dy alla dx , ci darà ciò non ostante, per quanto è stato detto, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, e però sarà necessaria

una terza differenziazione; generalmente tante volte

dovrà

dovrà differenziarsi l'equazione, quante sono le radici eguali, o sia i rami della curva, e dall'ultima differenza ricaverassi la ragione della dy alla dx , e tante faranno le tangenti, quanti sono i rami della curva stessa, i quali in quel punto si tagliano.

Sia la curva $QADHAbdAI$ (Fig. 48.) dell'equazione $x^3 - ayxx + by^3 = 0$, la quale à i tre rami QAD , IAd , bAH , che si tagliano in A ; e sia AP l'asse delle x , ed AB normale ad AP l'asse delle y , ed A la comune loro origine. Differenziando l'equazione, sarà $4x^2 dx - 2ayx dx - axxdy + 3byydy = 0$, cioè $\frac{dx}{dy} = \frac{axx - 3byy}{4x^2 - 2ayx}$. Ma se si voglia la tangente del punto

to A , poichè in esso è $x=0$, $y=0$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Si

passi adunque alla seconda differenziazione, e sarà $12xxdx^2 - 2aydx^2 - 4axdx dy + 6bydy^2 = 0$, ma di qua pure si ricava $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$, essendo ogni termine moltipli-

cato per $x=0$, secondo la supposizione, ovvero per $y=0$.

Differenziando finalmente per la terza volta, sarà $24xxdx^2 - 6adydx^2 + 6bbydy^2 = 0$, ma posta $x=0$, svanisce il primo termine, e però è $adx^2 dy = bdy^3$; dal che si ricavano tre valori della dy , cioè $dy=0$, e $dy = \pm \frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, i quali ci danno tre rapporti della dx alla

dy ,

dy, vale a dire tre tangenti per lo punto *A*; una infinita, che si confonde con l'asse *AP*, e serve per il ramo *baH*. L'altre, prendendo una qualunque *AS*, e tirando normalmente *ST* tale, che sia *ST*, *SA*:: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, le *TA* faranno tangenti nel punto *A*, l'una del ramo *QAD*, l'altra del ramo *IAA*.

70. La verità di questo metodo si può dimostrare anco in altra maniera, e come suol dirsi *A posteriori*. I differenziali dell'equazioni finite, che con le accennate regole del differenziare si trovano, non sono essi realmente i differenziali compiuti, dandoci le regole i soli termini, che contengono i differenziali primi, cioè di una sola dimensione, ed ommettendo in figura di compendio, e di maggior comodo i differenziali di altro grado, cioè di maggior dimensione, i quali per i principj del calcolo, già renderebbero relativamente nulli i termini, ne' quali si trovano.

Richiamata l'equazione

$$y^4 - 8xy^3 - 12axy^2 + 48aaxy + 4aaxx + 16aayy - 64a^2x = 0,$$

e differenziata, sarà

$$4y^3dy - 24xy^2dy - 12ayydx - 24axydy + 32aaydy + 48aaxdy + 48aaydx + 81axdx - 64a^2dx = 0; \text{ ma se la } y \text{ si consideri accresciuta della sua differenza, e così la } x, \text{ e che nella proposta equazione in luogo della } y, \text{ e}$$

sue

sue potestà si ponga $y + dy$, e le corrispondenti potestà, e lo stesso si faccia ponendo $x + dx$, e le potestà corrispondenti in luogo di x , e sue potestà, averassi
 $y^4 + 4y^3dy + 6yydy^2 + 4ydy^3 + dy^4 - 8ay^3 - 24ayydy - 24aydy^2 - 8ady^3 - 12axy - 24axydy - 12axydy^2 - 12ayydx - 24aydxdy - 12adx^2 + 16aay + 32aaydy + 16aady^2 + 48aaxy + 48aaydx + 48aaxy + 48aadx + 48aadx + 4aaxx + 8aaxdx + 4aadx^2 - 64x^3 - 64x^2dx = 0$, ed ordinando i termini in colonne secondo le dimensioni de' differenziali

I.	II.	III.	IV.	V.
$+ y^4$	$+ 4y^3dy$	$+ 6yydy^2$	$+ 4ydy^3$	$+ dy^4$
$- 8ay^3$	$- 24ayydy$	$- 24aydy^2$	$- 8ady^3$	
$- 12axy$	$- 24axydy$	$- 12axydy^2$	$- 12adx^2$	
$+ 16aay$	$- 12ayydx$	$- 24aydxdy$		$= 0.$
$+ 48aaxy$	$+ 32aaydy$	$+ 16aady^2$		
$+ 4aaxx$	$+ 48aaydx$	$+ 48aadx^2$		
$- 64x^3$	$+ 48aaxdy$	$+ 4aadx^2$		
	$+ 8aaxdx$			
	$- 64x^2dx$			

La somma per tanto di tutte queste colonne, tolto-
 ne la prima, che è l'equazione stessa proposta, sarà il
 compiuto, ed intero differenziale di lei. Ma perchè
 l'ultimo termine, cioè la colonna quinta è infinitamen-
 te piccola rispetto alla quarta, e la quarta rispetto alla

terza,

terza, e la terza rispetto alla seconda, si assume la sola seconda colonna per il differenziale della proposta equazione, il quale compendio ci vien dato dalla solita regola del differenziare; ma non è già, che le colonne dopo la seconda sieno assolutamente nulle. Se adunque nascerà il caso, che la seconda colonna sia assolutamente nulla, non farà più nulla rispetto a lei la terza, e però non dovrà trascurarsi, anzi sarà essa il differenziale della prima. Istessamente si discorra della quarta, quando sia zero la seconda, e la terza, e così de l'altre. Ora questo caso appunto succede, quando si cerca la relazione di dx alla dy nella proposta equazione in quel punto, in cui sia $y = 2x$, ed $x = 2a$; poichè, fatte queste sostituzioni, si trova essa seconda colonna esser zero, e però si passa a far uso della terza, il che è affatto la stessa cosa, che differenziare due volte l'equazione, come è manifesto.

71. Per gli stessi principj, e nella stessa maniera si scioglie un simil caso, che nasce talora nella costruzione delle curve, se l'ordinata venga espressa da una frazione, il cui denominatore, e numeratore divengano eguali al zero, quando si fissi per l'assissa un determinato valore.

A fine d'uscir d'imbarazzo basta considerare la frazione, come se esprimesse le ordinate di due curve, che in qualche punto del loro comune asse concorrano,

c

e perchè in quel punto la ragione loro non può in altro modo esser espressa, che per $\frac{0}{0}$, bisogna cercare,

quale sia il loro rapporto nel punto infinitamente prossimo, cioè quando esse sieno cresciute d'un'infinitesimo, vale a dire, passare alla differenziazione del numeratore, poi del denominatore della frazione stessa, e ciò una, due, o più volte fin tanto, che finalmente, posto il valore determinato dell'affissa nella frazione, essa non sia più $\frac{0}{0}$, e ciò per quella stessa ragione

detta di sopra intorno alle colonne de' differenziali.

Sia l'equazione $y = \sqrt{2ax - x^2} - a \sqrt{ax}$. Presa

$$a - \sqrt{ax},$$

$x = a$, e fatta la sostituzione, sarà $y = 0$, dal che non

si può perciò inferire, che all'affissa $x = a$ corrisponda l'ordinata $y = 0$. Differenziando adunque il numeratore, indi il denominatore della frazione, sarà $y =$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} dx - 2x^{\frac{1}{2}} dx \times \frac{-\frac{1}{2}}{2a^{\frac{1}{2}}x - x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} dx \times a^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{4} axx dx \times a^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{2}{4}}}$$

cioè dividendo sopra, e sotto per dx , e ponendo $x = a$, sarà $y = \frac{16a}{9}$.

Sia l'equazione $y = \frac{a \sqrt{4a^2 + 4x^2} - ax - aa}{\sqrt{2aa + 2xx} - x - a}$, se

si faccia $x = a$, sarà $y = \frac{0}{0}$.

Differenziando per tanto il numeratore, poi il denominatore della frazione, sarà $y = \frac{4axx \times \frac{-\frac{1}{2}}{4a^2 + 4x^2} - a}{2x \times 2aa - 2xx \times \frac{-\frac{1}{2}}{2} - 1}$

ommettendo la dx , che è tanto nel numeratore, quanto nel denominatore; ma se in questa frazione pure si ponga $x = a$, sarà ancora $y = \frac{0}{0}$, dunque passando a

differenziare questa seconda frazione, avremo $y = \frac{32a^2x \times \frac{-\frac{1}{2}}{4a^2 + 4x^2}}{4aa \times 2aa + 2xx \times \frac{-\frac{1}{2}}{2}}$, ommettendo la dx , e posta $x = a$, sarà $y = 2a$.



CAPO

C A P O I I I.

Del Metodo de' Massimi, e Minimi.

72. **S**E in una curva qualunque, le di cui ordinate sieno parallele, crescendo le assisse BC (*Fig. 49. 50. 51., e 52.*) continovamente, cresca altresì l'ordinata CG sino ad un certo punto E dopo di cui vada calando, o non vi sia più ordinata di sorta alcuna; o pure al contrario crescendo l'assissa, l'ordinata CG vada continovamente calando sino ad un certo punto E , dopo di cui, o cresca, o più non vi sia; l'ordinata EF si chiama la *Massima*, o la *Minima*.

Alla curva GHF sia EF la massima delle ordinate (*Fig. 49.*), o la minima (*Fig. 50.*); presa una qualunque assissa BC , e condotta l'ordinata CG , al punto G s'intenda essere tangente GA , e DH infinitamente prossima a CG ; chiamata $BC = x$, $CG = y$, e fatta GI parallela a BC , sarà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Poichè sono simili i triangoli ACG , GHI nella *Fig. 49.*, sarà AC , $CG :: GI$, IH ; e poichè sono simili i triangoli ATG , GHI nella *Fig. 50.*, sarà AT , $TG :: GI$, IH . Ciò posto, si finga che l'ordinata GC s'accosti sempre parallela a se stessa alla massima, o mi-

nima ordinata EF ; egli è chiaro, che accostandosi CG ad EF , la sottotangente AC , o AT si farà sempre maggiore per modo, che quando CG cada sopra la EF , la tangente si farà parallela a BC , e per conseguenza la sottotangente sarà infinita. In questo caso adunque avrà AC a CG , o AT a TG ragione infinita, rimanendo CG quantità finita; ma poichè è sempre AC , CG , o AT , $TG :: GI$, IH , averà anco GI ad IH ragione infinita, e però sarà dy nulla rispetto alla dx , cioè $dy = 0$ nel punto della massima, o minima ordinata.

Sia la curva GHF , (Fig. 51., e 52.) EF la minima delle ordinate (Fig. 51.), o la massima (Fig. 52.); presa pure una qualunque asissa BC , e condotta l'ordinata CG , la tangente GA , DH infinitamente prossima a CG , e GI parallela a BC , e chiamate $BC = x$, $CG = y$, farà $GI = CD = dx$, $IH = dy$. Per i triangoli simili ACG , GIH , farà (Fig. 51.) AC , $CG :: GI$, IH ; e per i triangoli simili ATG , GIH , (Fig. 52.) farà AT , $TG :: GI$, IH . Accostandosi adunque l'ordinata CG sempre parallela a se stessa alla massima, o minima ordinata, la sottotangente AC , o AT si farà sempre minore per modo, che quando CG cada sopra la EF , la tangente si farà normale a BC , e per conseguenza nulla la sottotangente. In questo caso adunque averà AC a CG , o AT a TG la ragione del nulla alla

alla quantità finita , e però essendo nella stessa ragione GI ad IH , farà dx nulla rispetto alla dy , cioè $dy = \infty$ nel punto della massima , o minima ordinata . Adunque la formola generale per le massime , e minime ordinate farà $dy = 0$, o pure $dy = \infty$.

73. Data adunque l'equazione della curva , di cui si cerca la massima , o la minima ordinata , si dovrà differenziare , per ritrarne il valore della frazione , o rapporto $\frac{dy}{dx}$, indi fatta la supposizione di $dy = 0$, o pure

di $dx = 0$, cioè di $dy = \infty$, si averà il valore dell'affissa x , a cui compete la massima o minima y , e questo valore sostituito nell'equazione proposta ci darà la massima , o minima ordinata , che si cerca ; solo avvertendo , che nel caso della supposizione di $dy = \infty$, cioè di $dx = 0$, la x farà figura di ordinata , se nell' altra supposizione la faceva la y . Che se nè la prima supposizione di $dy = 0$, nè la seconda di $dy = \infty$ ci fornirà valore alcuno reale della y , si dovrà concludere , che la proposta curva non à nè massimi , nè minimi .

74. Serve questo metodo per avere una compiuta , ed esatta idea delle curve ; per ricavare , in quali punti le tangenti sieno parallele agl'assi conjugati ec. Ma oltre ciò si applica ad infinite questioni , che in tale proposito possono farsi sì geometriche , come fisiche ; tale sarebbe il ricercare fra gl'infiniti parallelepipedi di una
data

data solidità, quale sia quello, che abbia la minima superficie; siccome il ricercare tra le infinite vie, che può tenere un mobile, per giugnere da un punto all'altro non posto nella medesima verticale, quale sia quella, che farà trascorsa nel minimo tempo con una data legge di moto, ed altre simili. In tali questioni ritrovata l'espressione analitica di ciò, che si vuole essere un massimo, o un minimo, si ponga eguale ad y , e fatta la differenziazione, si proceda avanti con le date regole.

ESEMPIO I.

75. Sia la curva dell'equazione $2ax - xx = yy$, e si voglia sapere, a quale punto dell'asse dell'assisse x corrisponda la massima ordinata y , e cosa ella sia.

Differenziata l'equazione, sarà $2adx - 2xdx = 2ydy$, cioè $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}$. Facendo la supposizione di $dy = 0$,

dovrà essere zero il numeratore della frazione, e però sarà $a - x = 0$, onde $x = a$; adunque la massima ordinata corrisponde a quell'assisa, che sia eguale ad a ; sostituito questo valore in luogo di x nella proposta equazione, sarà $2aa - aa = yy$, cioè $y = \pm a$; la massima ordinata adunque positiva, e negativa è eguale ad a . Facendo la supposizione di $dy = \infty$, dovrà essere zero il denominatore della frazione, e però sarà $y = 0$, sostituito

sostituito per tanto questo valore in luogo di y nella proposta equazione, avremo $x=0$, ed $x=2a$; vale a dire, che $x=0$ farà la minima, ed $x=2a$ la massima; o più propriamente, che quando sia $x=0$, ed $x=2a$, essendo infinita la dy rispetto alla dx , la sottotangente sarà nulla, cioè la tangente parallela alle ordinate y .

ESEMPIO II.

76. Sia la curva dell'equazione $xx - ax = yy$. Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - a}{2y}$. La supposizione di $dy=0$ ci dà $x = \frac{a}{2}$, ma sostituito questo valore in luogo

di x nella proposta equazione, la y si trova immaginaria, dunque la curva non è ordinata, che a tale asse corrisponda, e però molto meno avrà massima o minima. La supposizione di $dy = \infty$, cioè di $dx=0$ ci dà $y=0$, vale a dire, che la tangente sarà perpendicolare all'asse dell'assise x nel punto, in cui è $y=0$, il quale corrisponde alle due assise $x=0$, ed $x=a$, poichè sostituito in luogo di y il zero nella proposta equazione, sarà $xx - ax = 0$, e però $x=0$, ed $x=a$.

ESEM-

ESEMPIO III.

77. Sia la curva dell'equazione $2axy = a' + axx - bxx$, in cui le x sono le affisse, y le ordinate. Differenziando farà $2axdy + 2aydx = 2axdx - 2bxdx$, e però $\frac{dy}{dx} = \frac{ax - bx - ay}{ax}$. La supposizione di $dy = 0$ ci dà

$x = \frac{ay}{a-b}$, e sostituito questo valore nell'equazione proposta, farà $\frac{2aayy}{a-b} = a' + \frac{a'yy - aabyy}{a-b^2}$, cioè $yy = a \times \overline{a-b}$,

ed $y = \pm \sqrt{aa - ab}$, massima, o minima ordinata. E poichè abbiamo $x = \frac{ay}{a-b}$, fatta la sostituzione del valo-

re della y , farà $x = \pm \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a-b}}$, affissa, a cui corrispon-

de la ritrovata massima, o minima ordinata. La supposizione di $dy = \infty$, o sia di $dx = 0$ ci dà $ax = 0$, cioè $x = 0$, e fatta la sostituzione nella proposta equazione, farà $a' = 0$, ma implica, che una quantità data finita sia zero, adunque la curva non averà altri massimi, o minimi dai ritrovati nella prima supposizione, i quali per l'ambiguità de' segni sono due, ed eguali; uno positivo, che corrisponde alla affissa positiva, l'altro negativo, che corrisponde alla affissa negativa.

78. Ci dà il metodo confusamente i massimi, e minimi, nè in forza di esso si possono distinguere gl'uni dagl'altri, si riconoscono però quando sia noto l'andamento della curva; ma senza tale notizia si può procedere così. Si assegni all'affissa nell'equazione data un valore per poco maggiore, o minore di quello, che corrisponde alla massima, o minima ordinata, di cui si tratta, ed il valore dell'ordinata, che indi nasce, scioglierà il quesito; poichè se sarà maggiore di quello somministratoci dal metodo, la questione sarà de' minimi; ed all'opposto essendo, sarà de' massimi. La curva adunque di quest'esempio avrà due minimi.

E S E M P I O I V.

79. Sia la curva *MADEAN* (Fig. 53.) dell'equazione $x^3 + y^3 = axy$, $AB = x$, $BE = y$. Differenziando si averà $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - 3xx}{3yy - ax}$, e però facendo la supposizione di $dy = 0$, farà $y = \frac{3xx}{a}$, e fatta la sostituzione di questo valore nella data equazione, si trova $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, quindi poichè $y = \frac{3xx}{a}$, farà $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4} = BE$ la massima ordinata nella curva, la quale corrisponde all'affis-

Tom. II.

O

fa

fa $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2} = AB$. La supposizione di $dx = 0$ ci darà $x = \frac{3yy}{a}$, e fatta la sostituzione nell'equazione data, farà $y = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, quindi $x = \frac{a}{3} \sqrt[3]{4}$ la massima AC , cui corrisponde $y = CD = \frac{a}{3} \sqrt[3]{2}$, che è tangente nel punto D .

80. Ma prima di passare più avanti con gl'esempj, è necessario prevenire un caso, che suole alcuna volta succedere, ed è che tanto la supposizione di $dy=0$, quanto quella di $dy=\infty$ ci fornisca un medesimo valore dell'ordinata, o dell'assissa, ed in tale caso non si determina alcun massimo o minimo, ma bensì un punto di intersecazione, o d'incontro di due rami della curva. E la ragione è evidente, imperciocchè essendo $\frac{dy}{dx}$ eguale ad una frazione, se dal numeratore

si ricava lo stesso valore della x , per esempio, che si ricava dal denominatore, questo valore, o radice sostituita renderà nullo l'uno e l'altro, e però in quel tal punto di curva sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ma si è veduto di sopra al num. 69., che $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ indica sempre incontro di due rami di curva, adunque ec.

ESEM-

ESEMPIO V.

81. Sia la curva GFM (Fig. 51.) la Parabola cubica dell'equazione $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2ax + ax^2}$, $BE = EF = a$, $BC = x$, $CG = y$. Differenziando farà $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{2ax - 2a}{3 \times \frac{2}{3} \sqrt[3]{a^3 - 2ax + ax^2}} . \text{ La supposizione di } dy = 0 \text{ ci}$$

dà $x = a$; la supposizione di $dy = \infty$ ci dà parimenti $x = a$, adunque la curva ha un punto d'incontro F , che corrisponde all'ascissa $x = a$, ed alla minima ordinata $y = a$, che si cava dalla proposta equazione, sostituito in luogo di x il suo valore.

Sia la stessa equazione, ma libera da' radicali, cioè $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2ax + ax^2$; differenziando farà $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2a}{3yy - 6ay + 3aa}$. La supposizione di $dy = 0$

ci dà $x = a$, e posto questo valore nella proposta equazione, si ricava $y = a$. La supposizione di $dy = \infty$ ci dà pure $y = a$, adunque $x = a$, ed $y = a$ ci danno il punto F , che è un punto d'incontro, o contatto de' due rami GF , FM , e nello stesso tempo la minima y .

Ma se opereremo sopra l'equazione $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \frac{a - x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$,

O 2

che

che esprime il solo ramo GF ($y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{x - a^{\frac{2}{3}}}$)
 esprimerrebbe l'altro ramo FM) avremo $\frac{dy}{dx} = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3 \times \sqrt{x - a^{\frac{2}{3}}}}$

La supposizione di $dy=0$ nulla ci fa sapere; la supposizione di $dy=\infty$ ci dà $x=a$, e però $y=a$, ed il punto F in questo caso ci fornisce un massimo rispetto alla x , ed un minimo rispetto alla y .

82. Disli, che la supposizione di $dy=0$, che ci dà $2a^{\frac{1}{3}}=0$ nulla ci fa sapere, intendendo rispetto ai massimi finiti, perchè comprendendo anco gl'infiniti, ella ce ne somministra due. Se $2a^{\frac{1}{3}}=0$, farà dunque $a=0$, e sostituito questo valore nella proposta equazione, farà essa $\frac{y}{0} = \sqrt[3]{xx}$, cioè $x = \pm \sqrt{\frac{y}{0}}$, e però x , ed y infinite. Due sono i massimi, servendo uno al ramo FG , l'altro al ramo FM , poichè posta $a=0$, l'equazione ambedue gli esprime.

Nascerà generalmente questo caso ogni qual volta la supposizione di $dy=0$, o di $dy=\infty$ ci dia un'espressione finita costante, o un divisore costante eguale al zero, il qual valore sostituito nell'equazione proposta non porti o immaginario, o contradizione; e la ragione

ne si è, che una quantità finita non può essere presa per zero, se non rispetto a quantità infinita.

ESEMPIO VI.

83. Sia la curva (Fig. 54.) dell' equazione $x^4 - 2ax^3 + a^2xx = y^4$, $AB = a$; AC , o $AP = x$; CM , o $PM = y$; differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6axx + 2a^2x}{4y^3}$.

La supposizione di $dy = 0$ ci dà tre valori di x , cioè $x = 0$, $x = a$, $x = \frac{1}{2}a$; il valore $x = 0$ sostituito nella proposta equazione rende $y = 0$, il valore $x = a$ rende $y = 0$, il valore $x = \frac{1}{2}a$ rende $y = \pm \frac{a}{2}$. La supposi-

zione di $dy = \infty$ ci dà $y = 0$, adunque la y è il medesimo valore nell'una, e nell'altra supposizione, quando sia $x = 0$, ed $x = a$, quindi i punti A , B saranno punti d'incontro de' rami della curva, ed $x = \frac{1}{2}a = AC$ darà la massima ordinata $y = \pm \frac{1}{2}a = CM$, o Cm . Il luogo del sopra posto esempio può chiamarsi luogo doppio, il quale nasce dall'essere alzata al quadrato l'una, o l'altra delle due semplici formole $ax - xx = yy$, al circolo, o pure $xx - ax = yy$, all' iperbola. Quindi non sarebbe bastato il ridurre l'equazione al semplice circolo, o alla semplice iperbola, ma era necessario aver mira alla complicazione delle dette curve fra loro.

ESEM-

ESEMPIO VII.

84. Sia la curva della Fig. 55., la di cui equazione $yy = \frac{ax - 2axx + x^3}{2a - x}$, $AP = x$, $PM = y$, $AD = 2a$.

Differenziando sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4axx + 4axx - x^3}{y \times \frac{2a - x}{2}}$, cioè

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4axx + 4axx - x^3}{a - x \sqrt{x} \times \frac{2a - x}{2}}$$

ti offervo, che tanto il numeratore della frazione, quanto il denominatore è divisibile per $a - x$; adunque, e nella supposizione di $dy = 0$, e in quella di $dy = \infty$ si averà $a - x = 0$, cioè $x = a$, che sostituito ci dà $y = 0$, e però la curva avrà un nodo nell'asse, al punto B , fatta $AB = a$. Fatta per tanto la divisione, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{2a - x \sqrt{2ax - xx}}$. La supposizione di

$$dy = 0 \text{ ci dà } x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}; \text{ il valore } x = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$$

non serve, perchè sostituito nell'equazione proposta rende immaginaria la ordinata, la quale è generalmente immaginaria, qualora si assuma x maggiore di $2a$, come manifestamente si vede. Sostituito perciò l'altro

valore

valore $x = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, ci dà $y = \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$.

Fatta adunque $AP = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$, faranno PM , PM le massime ordinate, positiva l'una, e negativa l'altra, ed $= \pm a \sqrt{\frac{7a - 3a\sqrt{5}}{a + a\sqrt{5}}}$.

La supposizione di $dy = \infty$ ci dà $x = 0$, ed $x = 2a$; sostituiti quelli valori nell'equazione proposta, si averà $y = 0$, ed $y = \infty$; vale a dire, che presa $x = 0$, cioè nel punto A , la tangente sarà parallela alle ordinate PM , e presa $x = 2a = AD$, la ordinata sarà infinita, cioè asintoto della curva rispetto ai rami BH , BI .

ESEMPIO VIII.

85. Sia la Concoide dell'equazione $yy =$

$aaax - x^4 + 2abx - 2bx^3 - b^2xx + aabb$. Differenziando

$$\text{farà } \frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 - bx^3 - aabx - aabb}{\pm xx \sqrt{aaax - x^4 + 2abx - 2bx^3 - b^2xx + aabb}}.$$

Nel primo Libro al num. 239. sono stati da me considerati tre casi di questa curva; il primo quando sia $a = b$; il secondo quando sia b minore di a ; ed il terzo quando b sia maggiore di a .

Rispetto al primo caso: la curva farà quella della

Fig.

Fig. 56., e l'equazione $yy = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{xx}$,

presa $GA = GP = a$, $GE = x$, $EM = y$; e differenziando,
 $\frac{dy}{dx} = \frac{-x^4 - ax^3 - a^3x - a^4}{\pm xx \sqrt{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}}$. La supposizione

di $dy = 0$ ci dà il numeratore eguale al zero, cioè
 $x + a \times x^3 + a^3 = 0$; e però $x = -a$, il qual valore, sostituito nell'equazione della curva, ci dà $y = 0$. La supposizione di $dy = \infty$ ci dà il denominatore eguale al zero,

cioè $xx \sqrt{x + a \times aa - xx} = 0$, e però $x = 0$,
 $x = -a$, ed $x = a$; ma il valore $x = -a$ si è trovato anche nella supposizione di $dy = 0$, adunque quando sia $x = -a$, cioè presa $GP = a$, la curva averà nel punto P un' incontro di due rami.

Il valore $x = a$ sostituito nell'equazione ci dà $y = 0$, adunque la medesima x farà $= a = GA$, a cui corrisponde $y = 0$. Il valore $x = 0$ sostituito ci dà $y = \infty$; adunque per lo punto G , in cui $x = 0$, condotta una parallela alle ordinate, toccherà la curva in infinita distanza, vale a dire, farà un'asintoto.

Rispetto agli altri due casi: (Fig. 57. 58.) sia $GA = GK = a$, $GP = b$, ed il resto come sopra. La supposizione di $dy = 0$ ci darà $-x^4 - bx^3 - aabx - aabb = 0$, cioè $x + b \times -x^3 - aab = 0$, e però $x = -b$, $x = \sqrt[3]{-aab}$.

La

La supposizione di $dy = \infty$ ci darà

$$xx\sqrt{aaxx} - x^4 + 2aabx - 2bx^3 - bbxx + aabb = 0, \text{ cioè}$$

$$xx \sqrt{x+b} \times ax - xx = 0, \text{ e però } x=0, x=-b, \\ x=a, x=-a.$$

Il valore $x = -b$, che nel secondo caso sostituito nell'equazione rende $y = 0$, ci viene somministrato da ambedue le supposizioni, adunque (Fig. 57.) presa GP dalla parte de' negativi, ed $= -b$, il punto P farà un' incontro, o sia una intersecazione di due rami di curva. Lo stesso valore $x = -b$, sostituito nell'equazione della curva $\pm y = \frac{b+x}{x} \sqrt{ax - xx}$, ci dà nel terzo caso ne-

gativo il radicale, per essere b maggiore di a , e però immaginaria la curva, quindi a nulla serve.

Il valore $x = \sqrt[3]{-aab}$, sostituito nell'equazione della curva, ci dà $y = \pm \sqrt{\frac{aa - bb\sqrt[3]{abb} + 3ab\sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}}}$,

cioè immaginaria pure, quando sia b maggiore di a (Fig. 58.), e però similmente a nulla serve in questo terzo caso; ma ci dà y reale quando sia b minore di a , e però (Fig. 57.), fatta $GI = \sqrt[3]{-aab}$, farà IN la mas-

sima ordinata $y = \pm \sqrt{\frac{aa - bb\sqrt[3]{abb} + 3ab\sqrt[3]{-aab} + 3abb}{\sqrt[3]{abb}}}$.

Il valore $x = 0$ ci dà $y = \infty$, cioè asintoto; Il valore $x = \pm a$ ci dà $y = 0$, cioè la tangente ne' punti A, K parallela all'ordinate.

ESEMPIO IX.

86. Sia la mezza Cicloide abbreviata AMF (Fig. 59.), chiamata $AB = 2a$, $BF = b$, $AP = x$, $PM = z$, la femiperiferia $ANB = c$, l'arco $AN = q$; sarà $PN = \sqrt{2ax - xx}$, $NM = z - \sqrt{2ax - xx}$, e per la proprietà della curva, è $ANB, BF :: AN, NM$; cioè $c, b :: q, NM = \frac{bq}{c}$;

dunque $\frac{bq}{c} = z - \sqrt{2ax - xx}$. Differenziando, $\frac{bdq}{c} = dz - \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$; ma condotta mp infinitamente prossima ad MP , farà $Nn = dq = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, quindi fatta la

sostituzione nell'equazione, avremo $\frac{dz}{dx} = \frac{ab + ac - cx}{c\sqrt{2ax - xx}}$.

La supposizione di $dz = 0$ ci dà $x = \frac{ab}{c} + a$. Se adun-

que H sia il centro del circolo, presa HE eguale alla quarta proporzionale della femiperiferia ANB , della retta BF , e del raggio, la corrispondente ordinata sarà la massima, che si cerca.

La

La supposizione di $dz = \infty$ ci dà $x = 0$, ed $x = 2a$, vale a dire, che ne' punti A, F la tangente sarà parallela alle ordinate.

PROBLEMA I.

87. Dato il rettangolo ADCB, (Fig. 60.) si dimanda la minima retta QH, che si possa condurre per lo punto C nell'angolo QAH.

Sia $AB = a$, $BC = b$, $BH = x$, farà $CH = \sqrt{bb + xx}$, e per i triangoli simili HBC, HAQ , averassi $HB, HC :: HA, HQ$; cioè $x, \sqrt{bb + xx} :: x + a, HQ = \frac{x + a}{x} \sqrt{bb + xx}$. Supposta per tanto la $HQ = y$, come se fosse l'ordinata di una curva, onde si abbia $y = \frac{x + a}{x} \sqrt{bb + xx}$, e differenziando, farà $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - abb}{xx \sqrt{bb + xx}}$.

La supposizione di $dy = 0$ ci darà $x = \sqrt[3]{abb}$, e però fatta $BH = \sqrt[3]{abb}$, e condotta HCQ , farà essa la minima, che si cerca. La supposizione di $dy = \infty$ ci darà $x = \sqrt{-bb}$ immaginaria, ed $x = 0$, che a nulla serve, quando non s'intenda, che la retta condotta per lo punto C , che in questo caso sarebbe BC infinita-

tamente prodotta, sia un massimo, appunto per esser infinita.

In queste tali questioni adunque basterà differenziare quell'espressione, che si vuole essere un massimo, o minimo, ed indi supporre eguale al zero il numeratore, poi il denominatore.

PROBLEMA II.

88. Divisa la retta AB (Fig. 61.) in tre parti date AC , CF , FB , si dimanda il punto E , in cui deve tagliare la porzione di mezzo CF per modo, che il rettangolo $AE \times EB$ abbia al rettangolo $CE \times EF$ la minima ragione possibile.

Si chiami $AC = a$, $CF = b$, $CB = c$, e $CE = x$, farà $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, e però farà il rapporto $\frac{AE \times EB}{CE \times EF} = \frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$, che

deve essere un minimo. Il differenziale adunque farà $\frac{cxxx - bxxx - axxdx + 2acxdx - abcdx}{bx - xx}^2$,

numeratore eguale al zero, avremo

$$x = \frac{-ac \pm \sqrt{abcc - abbc - aabc + aacc}}{c - b - a}.$$

Un valore positivo, che ci dà il punto ricercato E da C verso B ,
l'altro

l'altro negativo, che ci darebbe il punto E da C verso A . Posto il denominatore eguale al zero, avremo $x = 0$, ed $x = b$, ne' quali due casi il rapporto de' rettangoli sarà il massimo, perchè presa $x = 0$, il punto E cade in C ; e presa $x = b$, il punto E cade in F , e però sì nell' uno, come nell' altro caso il rettangolo $CE \times EF$ è zero.

PROBLEMA III.

89. La data retta AB si debba tagliare talmente nel punto C , che il prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ sia il massimo di tutti i prodotti simili.

Chiamata $AB = a$, $AC = x$, sarà $CB = a - x$, e però $\overline{AC}^2 \times CB = axx - x^3$. Il differenziale sarà $2axdx - 3xxdx$, il quale paragonato al zero, darà $x = \frac{2a}{3}$, ed $x = 0$. Presa per tanto $AC = x = \frac{2a}{3}$, il

prodotto $\overline{AC}^2 \times CB$ sarà il massimo; e presa $x = 0$, il prodotto sarà in un certo modo il minimo, perchè sarà zero, cadendo il punto C in A . Non essendo la differenziale una frazione, non à luogo l'altra solita supposizione del denominatore eguale a zero, ma se si voglia considerare l'espressione del prodotto $axx - x^3$,

come

come un'ordinata di curva, converrà per la legge degli omogenei dividere esso prodotto per un piano costante, e così il differenziale sarà una frazione del denominatore costante; ma essa costante non può mai esser zero, se non relativamente alla x assunta infinita, e certamente, che allora il prodotto sarà un massimo, quando sia $AC = x = \infty$.

O detto, che il prodotto $\overline{AC} \times CB$ è un massimo, quando sia $AC = \frac{2a}{3}$, il che chiaramente si vede dal descrivere la curva dell'equazione $\frac{axx - x^3}{aa} = y$; poichè tutte le ordinate tra A , e B sono minori di quella, che corrisponde all'assissa $x = \frac{2a}{3}$. Sostituito nell'equazione l'altro valore $x = 0$, farà $y = 0$, dal che si conchiude, che esso valore a nulla serve.

90. Nel Problema antecedente, ed in tutti quelli di simil natura si può fare uso di questo metodo per conoscere, se le questioni sono de' Massimi, o de' Minimi.

PROBLEMA IV.

91. *Fra tutti i parallelepipedi eguali ad' un dato cubo, e de' quali sia dato un lato, si dimanda quello, che abbia la minor superficie.*

Il dato cubo sia a^3 , ed il lato cognito del parallelepipedo sia $= b$, uno de' lati, che si cercano, sia $= x$; il terzo sarà $= \frac{a^3}{bx}$, poichè il prodotto de' tre,

forma il parallelepipedo eguale al dato cubo a^3 . I prodotti dei lati presi a due a due, cioè bx , $\frac{a^3}{x}$, $\frac{a^3}{b}$

formano i tre piani, che sono la metà della superficie del parallelepipedo, e però la somma di questi, cioè $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ deve essere il minimo, che si cerca. Dif-

ferenziando adunque, avremo $b dx - \frac{a^3 dx}{x^2}$, o sia $\frac{bx^2 dx - a^3 dx}{x^2}$. La supposizione del numeratore eguale

al zero ci dà $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; saranno adunque i tre lati del

parallelepipedo, che si cerca, b , $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, ed $\frac{a^3}{b \sqrt{\frac{a^3}{b}}}$,

cioè $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, e però eguali faranno i due lati, che si

cercano. La supposizione del denominatore eguale al zero a nulla serve, perchè ci dà $x = 0$, il che distrugge il problema.

Se si volesse il parallelepipedo con le assegnate
con-

condizioni, ma senza assumere lato alcuno per dato, chiamatone uno $= x$, sono gl'altri due eguali tra loro, ed $= \sqrt{\frac{a^3}{x}}$, e la somma de' tre piani, che deve essere un minimo, farà $2x \sqrt{\frac{a^3}{x}} + \frac{a^3}{x}$, e differenziando,

$$\frac{a^3 dx}{x \sqrt{\frac{a^3}{x}}} - \frac{a^3 dx}{xx} = 0 \text{ sia } \frac{a^3 x dx}{xx} - \frac{a^3 dx \sqrt{\frac{a^3}{x}}}{xx \sqrt{\frac{a^3}{x}}}.$$

il numeratore eguale al zero, si averà $x = a$, e gl'altri due lati parimenti $= a$, ed il cubo stesso farà il parallelepipedo, che si cerca.

PROBLEMA V.

92. *Fra gl'infiniti conì inscritti in una sfera, determinare quello, la di cui superficie convessa, cioè non compresa la base, sia la massima.*

Nel semicircolo ABD (Fig. 61.) sieno i triangoli ABC , AEH , e si giri il semicircolo attorno al diametro AD ; nel mentre, che egli descrive la sfera, i triangoli descriveranno tanti conì, ma poichè da Archimede si dimostra, che le superficie de' conì inscritti sono tra loro, come i prodotti $AE \times EH$, $AB \times BC$,

la questione si riduce a determinare nel diametro AD il punto C tale, che il prodotto $AB \times BC$ sia il massimo.

Chiamo adunque $AC = x$, $AD = a$; farà, per la proprietà del circolo, $CB = \sqrt{ax - xx}$, $AB = \sqrt{ax}$, ed $AB \times BC = \sqrt{ax} \sqrt{ax - xx} = \sqrt{aaxx - ax^3}$. Differenziando adunque, avremo $\frac{2aaxdx - 3axxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}}$, e

fatto il numeratore $= 0$, farà $x = \frac{2a}{3}$, ed $x = 0$; fatto

il denominatore $= 0$, farà $x = a$, ed $x = 0$. Pre-fa adunque $AC = \frac{2}{3} AD$, la superficie del cono descritto dal triangolo ABC farà la massima, che si cerca. Gli altri due valori $x = 0$, ed $x = a$ non servono, come è chiaro.

PROBLEMA VI.

93. Dato l'angolo FDG , (Fig. 63.) e dato di posizione il punto A , ritrovare la minima retta, che nel dato angolo passi per lo punto A .

Sia CB quella, che si cerca, e si tiri AQ normale ad FD , FAP normale a DG , e CK normale ad

Tom. II.

Q

FP.

FP. Poichè è dato l'angolo *FDG*, e l'angolo *FPD* è retto, sarà noto l'angolo *AFQ*, ma è in oltre dato di posizione il punto *A*, dunque saranno note le *QA*, *QF*, *FA*, *QD*. Sia per tanto *QF* = *a*, *QA* = *c*, *QD* = *b*, e la *QC* = *x*, sarà $FA = \sqrt{aa + cc}$, $CA = \sqrt{cc + xx}$, $FD = b + a$, $FC = a - x$. Ma per i triangoli simili *FAQ*, *FDP*, è *FA*, *FQ* :: *FD*, *FP*; adunque $FP = \frac{aa + ab}{\sqrt{aa + cc}}$, e però $AP = \frac{ab - cc}{\sqrt{aa + cc}}$;

per i triangoli simili *FCK*, *FAQ*, è *AF*, *FQ* :: *FC*, *FK*, adunque $FK = \frac{aa - ax}{\sqrt{aa + cc}}$, onde $AK = \frac{cc + ax}{\sqrt{aa + cc}}$;

e finalmente per i triangoli simili *ACK*, *ABP*, sarà *AK*, *CA* :: *AP*, *AB*; adunque $AB = \frac{ab - cc\sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$,

e però $CB = \sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc\sqrt{cc + xx}}{cc + ax}$, che deve

esser la minima. Differenziando sarà

$$\frac{xdx}{\sqrt{cc + xx}} + \frac{xdx \times ab - cc \times cc + ax - adx \times ab - cc \times cc + xx}{\frac{cc + ax}{\sqrt{cc + xx}} \times \frac{cc + xx}{\sqrt{cc + xx}}} = 0,$$

e posto il numeratore = 0, (riducendo prima al comun denominatore) sarà $x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^2}{a} - bcc = 0$, equazione solida.

Per

Per costruirla prendo l'equazione alla parabola $xx = ay$; fatta la sostituzione, sarà
 $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{c^2}{aa} - \frac{bcc}{a} = 0$, luogo all'iperbola fra
 gl'asintoti.

Ciò posto, sulla retta QD si prenda $QM = \frac{2cc}{a}$, e
 condotta dal punto M parallela ad AQ la retta.
 $MN = \frac{bcc}{aa}$, si tiri NS parallela a QD , e fra gl'asim-
 toti NS , NT si descriva l'iperbola HOV del rettango-
 lo costante $= \frac{2bc^2 + aabcc - ac^2}{a^3}$, e sieno sulla retta.

QF le x prese dal punto Q ; e ad esse normali le y .
 Indi all'asse AQ , vertice Q , parametro $= a$ si descri-
 va la parabola QO dell'equazione $xx = ay$; dal punto
 O , in cui la parabola taglia l'iperbola, condotta OC
 parallela ad AQ , e dal punto C condotta per lo punto
 A la retta CAB , sarà essa la minima; che si cerca.

Ed in fatti, per la costruzione, è $NS = x + \frac{2cc}{a}$,
 $SO = y + \frac{bcc}{aa}$, e per la proprietà dell'iperbola, deve
 essere $NS \times SO =$ al rettangolo costante, dunque
 $xy + \frac{2ccy}{a} + \frac{bccx}{aa} + \frac{2bc^2}{a^3} = \frac{2bc^2 + aabcc - ac^2}{a^3}$, ma

$$Q 2 \qquad CO =$$

$CO = y = \frac{xx}{a}$, per la proprietà della parabola, dun-

que sostituito in luogo di y questo valore, avremo

$$\frac{x^3}{a} + \frac{2ccxx}{aa} + \frac{bccx}{ax} = \frac{bcc}{a} - \frac{c^2}{aa}, \text{ cioè}$$

$$x^3 + \frac{2ccxx}{a} + \frac{bccx}{a} + \frac{c^2}{a} - bcc = 0, \text{ che è l'equazione,}$$

da cui si doveva ricavare il valore della x , adunque cc.

O fatta la supposizione, che sia zero il numeratore della frazione, che esprime il minimo.

L'altra supposizione, che sia zero il denominato-

re, darà $\frac{cc+ax}{\sqrt{cc+xx}} = 0$, cioè $\sqrt{cc+xx} = 0$,
 $cc+ax = 0$; ma $\sqrt{cc+xx} = 0$ ci dà $x = \sqrt{-cc}$ im-
 maginaria, e però non serve; $cc+ax = 0$ ci dà
 $x = -\frac{cc}{a}$, ma presa $Qc = x = -\frac{cc}{a}$, e condotta Ac ,

farà il triangolo QAc simile al triangolo QFA , o sia PFD , e però l'angolo QcA eguale all'angolo FDP ; quindi cA sarà parallela alla DP , vale a dire la condotta dal punto c , e per lo punto A nel dato angolo FDG sarà infinita, che in certo modo è un massimo.

Più brevemente ancora si può vedere, che in questo caso la retta, che si cerca, sarà infinita; poichè

nell'

nell' espressione $\sqrt{cc + xx} + \frac{ab - cc}{cc + xx} \sqrt{cc + xx} = CB$,
 sostituito in luogo di x il valore $-\frac{cc}{a}$, il denominato-
 re diviene zero, e però la linea infinita;



CAPO

C A P O I V.

De' Flessi contrarj, e de' Regressi.

94. **C**OSA sieno i Flessi contrarj, ed i Regressi, è stato abbastanza detto nel Lib. I. Cap. VI., poste le quali notizie: Sia la curva *ADEM* (*Fig. 64.*) con le coordinate parallele, la quale abbia in *E* un flesso contrario, o regresso; presa una qualunque assissa $AB=x$, l'ordinata $BD=y$, e condotta *CF* parallela, ed infinitamente prossima a *BD*, egli è manifesto, che assunta $dx=BC$ costante, crescendo sempre più la assissa $AB=x$, la differenza *GF* dell'ordinata *BD*, cioè la *dy* si farà sempre minore fin' a tanto, che l'ordinata sia la *HE*, che corrisponde al punto del flesso contrario, o del regresso, dopo del qual punto nell' uno, e nell' altro caso la *dy* anderà sempre facendosi maggiore. Adunque nel punto del flesso contrario, e del regresso la *dy* sarà un minimo; ondè, per lo metodo de' massimi, e minimi, $ddy=0$, o pure $d.ly=\infty$ farà la formola de' flessi contrarj, e de' regressi.

Se la curva sarà (*Fig. 65.*) prima convessa, e poi concava all' asse *AH*: crescendo parimente la assissa, cresce la differenza dell' ordinata sino al punto *E* del flesso

flesso contrario, o regresso, dopo di cui va calando; farà adunque in quel punto la dy un massimo, e però istessamente si dovrà porre $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Lo stesso s'inferisca ancora dal considerare, che nelle curve prima concave all'asse la differenza seconda dell'ordinata y , cioè la ddy è negativa sino al punto E di regresso, o di flesso contrario, di poi si fa positiva; e nelle curve prima convesse essa differenza seconda è positiva sino al punto E , di poi si fa negativa; ma una quantità qualunque non può da negativa farsi positiva, o da positiva farsi negativa; se non passando per lo zero, o per l'infinito, adunque nel punto E di regresso, o di flesso contrario deve essere $ddy = 0$, o pure $ddy = \infty$.

Sia tangente della curva AEM prima concava all'asse (Fig. 64.) nel punto D la retta DT , e nel punto E la retta EP ; crescendo l'assisa AB , crescerà sempre l'intercetta AT fra la tangente, e l'origine delle assise fino a tanto, che il punto B cada in H , dopo di che nel caso del flesso contrario crescendo ancora l'assisa, calerà essa intercetta, adunque nel punto E di flesso contrario l'intercetta $AP = \frac{ydx}{dy} - x$ dovrà essere un massi-

mo, e però differenziando, presa dx costante, $\frac{dy^2 dx - y dx ddy - dy^2 dx}{dy^2}$ eguale al zero, o all'infinito,

cioè

cioè riducendo, dividendo per $-ydx$, e moltiplicando per dy^2 , sarà finalmente $ddy=0$, o pure $ddy=\infty$. Nel caso, che il punto E sia di regresso, crescendo l'intercetta AT , crescerà pure l'assissa AB , fino a che il punto T cada in P , e l'assissa sarà AH , oltre il qual punto T l'assissa anderà calando; sarà adunque AH un massimo, e però la sua differenza eguale al zero, o all'infinito, adunque relativamente a tale differenza sarà infinita, o zero la differenza di AP , e però $ddy=\infty$, o pure $ddy=0$, come prima.

Se la curva (*Fig. 65.*) sia prima convessa all'asse, l'intercetta AT sarà $=x - \frac{ydx}{dy}$, e la differenza

$$\frac{dx dy^2 - dx dy^2 + y dx dy}{dy^2}, \text{ o sia } \frac{y dx dy}{dy^2}, \text{ e però dividendo per } ydx, \text{ e moltiplicando per } dy^2, \text{ si avrà nè più, nè meno } ddy=0, \text{ o pure } ddy=\infty.$$

Nella curva DEM , (*Fig. 66.*) essendo A l'origine delle assisse x , ed E il punto del flesso contrario, l'intercetta AP sarà $=AH + HP$, ma in tale caso la sottotangente HP è negativa, vale a dire $-\frac{ydx}{dy}$, adunque sarà $AP = x - \frac{ydx}{dy}$, onde si vede, che in nessun modo essa intercetta AP potrà essere $x + \frac{ydx}{dy}$.

95. Serve la ritrovata formola per le curve, che
anno

anno le ordinate parallele, cioè che sono riferite ad un'asse, o diametro; ma ella è diversa nelle curve riferite al fuoco.

Sia (Fig. 67. 68.) la curva ADE , il fuoco Q , da cui partono le ordinate QD , e sia Qd infinitamente prossima alla QD ; condotta QT normale a QD , e $Q\tau$ normale a Qd , li tiri DT tangente della curva nel punto D , e ($d\tau$) tangente nel punto d ; la $Q\tau$ prodotta, se fa bisogno, incontrerà DT nel punto o . Ora è chiaro, che crescendo le ordinate, se la curva è concava verso il fuoco Q , (Fig. 67.) farà $Q\tau$ maggiore di QT ; ma se la curva è convessa verso il fuoco Q , (Fig. 68.) farà $Q\tau$ minore di QT ; adunque nel passare la curva da concava ad esser convessa, o vicendevolmente, cioè nel punto del flesso contrario, e regresso, la quantità ($o\tau$) dovrà farsi da positiva negativa, o all'opposto, e però dovrà passare per lo zero, o per l'infinito.

Sia pertanto $QD=y$, $DM=dx$, e col centro Q si descrivano gli archi infinitesimi DM , TH ; faranno simili i due triangoli dMD , dQT , siccome dQo , THo , e però sarà $dM, MD :: dQ$, o sia DQ, QT , cioè $dy, dx :: y, QT = \frac{ydx}{dy}$, ma sono simili pure i due settori

DQM , TQH ; quindi $QD, DM :: QT, TH$, cioè $y, dx :: \frac{ydx}{dy}, TH = \frac{dx^2}{dy}$, e per la similitudine de' trian-

goli dQo , THo , farà dQ (o sia DQ), Qo (o sia QT):: TH , Ho ; cioè y , $\frac{ydx}{dy}$:: $\frac{dx^2}{dy}$, $Ho=\frac{dx^2}{dy}$; ma

Ht (Fig. 67.) è la differenza di QT , cioè $Ht = \frac{dx dy^2 - y dx ddy}{dy^2}$, (presa per costante dx) adunque

$$to = tH + Ho = \frac{dx dy^2 - y dx ddy + dx^2}{dy^2}, \text{ che deve essere}$$

eguale al zero, o all'infinito, e però anche moltiplicando per dy^2 , e dividendo per dx , farà $dy^2 - y ddy + dx^2$ eguale al zero, o all'infinito.

Nella Fig. 68. la (*or*) viene ad esser negativa, e però $= -\frac{dx dy^2 + y dx ddy - dx^2}{dy^2}$, onde dividendo per $-dx$,

e moltiplicando per dy^2 , farà $dx^2 + dy^2 - y ddy$ eguale al zero, o all'infinito.

Se per tanto una curva qualunque riferita al fuoco Q , (Fig. 69.) le di cui ordinate $QB = y$, e gli archetti $BC = dx$, averà un flesso contrario, o regresso, la formola generale per determinarlo farà $dy^2 + dx^2 - y ddy = 0$, o pure $dy^2 + dx^2 - y ddy = \infty$.

Se si supponga y infinita, nella formola $dx^2 + dy^2 - y ddy$ saranno nulli i primi due termini rispetto al terzo, e però farà $-y ddy$ eguale al zero, o all'infinito, e dividendo per $-y$, avremo $ddy = 0$, o $ddy = \infty$,
cioè

cioè la formola del primo caso delle curve riferite al diametro, come appunto deve succedere; perchè, supposta y infinita, le ordinate sono tra loro parallele.

96. Data la natura della curva, per mezzo di un'equazione, e supposta dx costante, differenziando due volte, se l'equazione è algebrica; una sola, se è differenziale del primo grado, a fine di avere il valore della ddy dato per dx , quello paragonato al zero, indi all'infinito ci fornirà i valori dell'assisa x , ai quali corrisponde l'ordinata y , che incontra la curva ne' punti di flesso contrario o regresso, se però, posti tali valori in luogo di x nell'equazione della curva, si abbia la y reale, che se la y sarà immaginaria, o involverà contradizione, la curva non avrà tali punti.

97. Per distinguere i flessi contrarj dai regressi, giacchè il metodo ci dà confusamente gl'uni, e gl'altri, basterà vedere a un di presso l'andamento della curva, e quello ci darà il lume necessario per determinarli.

98. Un'altra sorta di regresso possono avere le curve diversa da quella, che ora si è considerata, ed è quando la curva ritorna indietro verso la sua origine rivoltando la sua concavità a quella stessa parte, a cui la rivolgeva prima del regresso. Dopo aver trattato de' Raggi Osculatori, darò alla fine del seguente Ca-

po la formola generale anche per i regressi di questa seconda sorta.

ESEMPIO I.

99. Sia (Fig. 51.) la parabola cubica dell'equazione $y = a + \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$, che si è veduto nell'Esempio V. del Capo antecedente num. 81. avere un punto d'incontro. Differenziando è adunque $dy = - \frac{2aadx + 2axdx}{3 \times \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}}$, e differenziando di nuo-

vo, presa dx costante, farà $ddy = - \frac{2adx^2}{9 \times \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}}$.

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $-2adx^2 = 0$, il che non serve; fatta adunque la supposizione di $ddy = \infty$,

farà $9 \times \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx} = 0$, cioè $aa - 2ax + xx = 0$, e però $x = a$. Sostituito, in luogo di x , questo valore nella proposta equazione, farà $y = a$, adunque la curva à un flesso contrario, o regresso, che corrisponde alla asissa $x = a$, alla quale compete l'ordinata $y = a$, e perchè si fa altronde, essere pure quello

un

un punto d'incontro, non potrà dunque essere un flesso contrario, ma bensì un regresso.

Sia la stessa parabola cubica, ma presa le asisse $AB = x$ dal vertice A , (Fig. 70.) e BC le y . L'equazione è $axx = y^3$, e differenziando $2axdx = 3yydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, $ddy = -\frac{6ydy^2 + 2adx^2}{3yy}$; ma per l'equazione, si è $3yy =$

$$3x \sqrt[3]{aax}, \text{ e per la prima differenziazione, } dy = \frac{2axdx}{3x \sqrt[3]{aax}}, \text{ adunque fatte le sostituzioni, sarà } ddy = -\frac{2adx^2}{9x \sqrt[3]{aax}}.$$

La supposizione di $ddy = 0$ non serve; la supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $9x \sqrt[3]{aax} = 0$, cioè $x = 0$, il qual valore sostituito nell'equazione rende $y = 0$, adunque la curva à un regresso nel vertice A .

ESEMPIO II.

100. Sia la versiera DFM , (Fig. 71.) la di cui equazione $y = a \sqrt{\frac{a-x}{x}}$, $AB = x$, $BF = y$, $AD = a$.

Diffe-

Differenziando, $dy = - \frac{axdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $d^2y = \frac{3a^2dx^2 - 4axdx^{\frac{3}{2}}}{4x^2 \times ax - xx^{\frac{3}{2}}}$.

La supposizione di $dy = 0$ ci dà $3a^2 - 4ax = 0$, cioè $x = \frac{3a}{4}$, il qual valore sostituito nell'equazione della

curva rende $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, onde presa $AB = \frac{1}{4}a$, la ordinata $BF = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ incontrerà la curva nel punto F , che sarà un flesso contrario. La supposizione di $dy = \infty$

ci dà $4x \times \frac{1}{2\sqrt{ax-xx}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = a$, il primo valore sostituito nell'equazione rende $y = \infty$, il secondo $y = 0$; ma nè l'uno, nè l'altro caso porta flesso contrario, e porta solo, che sì l'asintoto AQ , come la tangente nel punto D è parallela alle ordinate.

ESEMPIO III.

101. Sia (Fig. 72, 73, e 74.) la Cicloide dell'equazione $dz = \frac{ardx + brdx - bxdx}{b\sqrt{2rx - xx}}$ num. 47. Differen-

ziando

$$\text{ziando, farà } ddz = \frac{arx - arr - brr}{b \times 2rx - xx^{\frac{3}{2}}} \times dx^{\frac{1}{2}}.$$

La supposizione di $ddz = 0$ ci dà $arx - arr - brr = 0$, cioè $x = r + \frac{br}{a}$. Se a sia maggiore di b , la cicloide

farà l'allongata; onde, presa CE dal centro eguale alla quarta proporzionale di BF , del semicircolo, e del raggio, e condotta l'ordinata ED , (Fig. 73.) incontrerà essa la curva nel punto del flesso contrario D . Se sia a minore di b , (Fig. 74.) la cicloide farà la raccorciata; ma quando $a < b$, la $x = r + \frac{br}{a}$ farà maggiore

di $2r$, cioè maggiore di AB , nel qual caso le ordinate sono immaginarie, perchè non vi è curva al di sotto del punto F , adunque la curva non à flessi contrarj, nè regressi. Se sia $a = b$, la cicloide farà l'ordinaria, (Fig. 72.) e però $x = r + \frac{br}{a} = 2r = AB$, ed $y = BF$, il

che non ci dà flesso contrario, o regresso; ma bensì ci fa sapere, che la tangente in F farà parallela alle asisse, o sia al diametro AB .

La supposizione di $ddz = \infty$ ci dà $b\sqrt{2rx - xx^{\frac{3}{2}}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = 2r$. Il valore $x = 0$ in tutti tre i casi ci dà la tangente nel punto A parallela alle ordinate. Il valore $x = 2r$ nel primo, e secondo caso ci dà

dà la tangente nel punto F istessamente parallela alle ordinate; ma nel terzo caso ci dà una contraddizione, poichè essendo l'equazione $dz = \frac{dx \sqrt{2r - x}}{\sqrt{x}}$, sostituito in

luogo di x il valore $2r$, farà $dz = 0$, ma non può essere $dz = 0$, e assieme $dz = \infty$, adunque tale valore a nulla serve in questo caso.

E S E M P I O IV.

102. Sia la Concoide di Nicomede di sopra considerata al num. 85., la di cui equazione è

$$yy = \frac{axx - x^2 + 2abx - 2bx^2 - b^2xx + aabb}{xx}, \text{ o sia}$$

$$y = \frac{b + x \sqrt{aa - xx}}{x}. \text{ Differenziando, farà}$$

$$dy = -\frac{x^2 dx - aabdx}{xx \sqrt{aa - xx}}, \text{ e di nuovo differenziando, pre-$$

$$\text{sa } dx \text{ costante, } ddy = \frac{2a^2b - ax^2 - 3abxx}{x^3 \times \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}} \times dx^2.$$

A riguardo de' tre soliti casi, che può avere questa curva, comincio dal primo quando $a = b$. (Fig. 56.)

$$\text{Ciò posto, farà } ddy = \frac{2a^2 - ax^2 - 3a^2xx}{x^3 \times \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}} \times dx^2.$$

La

La supposizione di $ddy = 0$ ci dà $2a' - ax' - 3a'xx = 0$, cioè $x' + 3axx - 2a' = 0$, e, risolvendo l'equazione, $x = \sqrt{3aa} - a$, $x = -\sqrt{3aa} - a$, $x = -a$; il primo valore ci dà l'assissa $GE = x = \sqrt{3aa} - a$, a cui compete l'ordinata $EM = y = \frac{\sqrt{3aa} \sqrt{2a \sqrt{3aa} - 3aa}}{\sqrt{3aa} - a}$,

che incontra la curva nel punto M del flesso contrario; il secondo valore a nulla serve, perchè rende l'equazione della curva immaginaria; il terzo ci dà un regresso nel punto P .

Riguardo agli altri due casi, la supposizione di $ddy = 0$ ci dà $2aab - x' - 3bxx = 0$, o sia $x' + 3bxx - 2aab = 0$. Per avere adunque le radici di quest'equazione, pongo $xx = bz$, luogo alla parabola apolloniana, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo $xz + 3bz - 2aa = 0$, all'iperbola.

Fra gli asintoti AQ , AD , fatta $AC = 2a$, CN normale $= a$, $AD = 3b$, e prese sull'asintoto AD dal punto D le x , si descriva (Fig. 75.) l'iperbola GNF del rettangolo costante $= 2aa$, passerà essa per lo punto N ; indi alzata DM normale alla DA , all'asse DM , vertice D , parametro $= b$, si descriva la parabola dell'equazione $xx = bz$.

Se adunque si assuma b maggiore di a , poichè $AD = 3b$, $AC = 2a$, farà CD maggiore di b , ora presa

Tom. II.

S

nella

nella parabola la assissa $z = a = CN$, l'ordinata farà $x = \sqrt{ab}$, ma se a è minore di b , farà anco $\sqrt{ab}$ minore di b , e però anco minore di CD ; adunque la parabola taglierà l'iperbola tra N , e D nel punto, per esempio, I .

Ciò posto, se si assuma $x = -a$, farà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2as}{-a+3b}$, ma $\frac{as}{b}$ è maggiore di $\frac{2as}{-a+3b}$, dunque la parabola taglia l'iperbola

nel punto I tale, che farà $HI = -x$ minore di a , e però questa assissa averà nella concoide (Fig. 58.) la ordinata reale, che ci determina il flesso contrario nel punto, per esempio N , del ramo inferiore KN . La GM condotta dal punto G , altra intersecazione della parabola, e dell'iperbola, farà necessariamente maggiore di a , e però a tale assissa non corrisponde nella concoide ordinata alcuna reale, onde quello valore a nulla serve. Finalmente il terzo valore TF ci darà l'assissa, a cui compete l'ordinata nel ramo superiore, che incontra la curva nel flesso contrario M .

Sia b minore di a , farà (Fig. 76.) CD minore di b , e presa nella parabola la $z = a = CN$, l'ordinata farà $x = \sqrt{ab}$, cioè maggiore di b , e però maggiore di CD , adunque la parabola passerà tra N , e C , quindi o non taglierà essa l'iperbola, e i due valori negativi della x nell'

nell'equazione $x^2 + 3bxx - 2aab = 0$ faranno immaginari; o se la taglia, faranno essi sempre maggiori di a , ai quali nella concoide (Fig. 57.) corrispondono ordinate immaginarie, e però a nulla servono. Taglierà però la parabola certamente l'iperbola dalla parte de' positivi nel punto, per esempio F ; quindi la TF , che è minore di a , farà il valore della x , a cui corrisponde l'ordinata nel ramo AM della concoide, che l'incontra nel punto del flesso contrario M .

Disi, che se la parabola taglia l'iperbola tra N , ed O , i due valori negativi della x faranno maggiori di a ; imperciocchè, presa $x = -a$ nella parabola, farà $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b-a}$, ma $\frac{aa}{b}$ è minore di $\frac{2aa}{3b-a}$; dunque fino a tanto, che x negativa non sia

maggiore di a , la parabola non taglierà l'iperbola, dunque la taglierà in un punto, in cui essa x sarà maggiore di a . Presa x positiva $= a$, farà nella parabola $z = \frac{aa}{b}$, e nell'iperbola $z = \frac{2aa}{3b+a}$; ma $\frac{aa}{b}$ è maggiore di

$\frac{2aa}{3b+a}$, dunque la parabola taglierà l'iperbola in un punto F tale, che farà TF minore di a .

La supposizione di $ddy = \infty$ ci dà $x^2 \times \frac{1}{aa - xx^2} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = \pm a$; vale a dire, che l'asintoto,

e la tangente in A sono parallele alle ordinate in tutti tre i casi, siccome la tangente in K nel secondo, e terzo caso; e nel primo, che in P vi è un punto d'incontro (come appunto portano i regressi) per esserci stato somministrato lo stesso valore $x = -a$ anche dalla supposizione di $ddy = 0$; il quale punto d'incontro si è trovato pure al num. 85.

103. In altro modo. Prendo la stessa Curva Concoide, ma con le ordinate tutte, che partano da un punto fisso, cioè dal polo P .

Sia adunque $PM = y$, (Fig. 56. 57., e 58.) e condotta PF infinitamente prossima a PM , e col centro P descritti gl' archetti MB , DH , sia $MB = dx$, $AG = a$, $GP = b$, e chiamata $PD = z$, $HO = dz$, per la proprietà della curva, sarà l'equazione $y = z \pm a$, cioè $y = z + a$ rispetto alla curva superiore al di sopra dell'asintoto GR , ed $y = z - a$ rispetto alla curva inferiore. Differenziando adunque nell' uno, e nell'altro caso, sarà $dy = dz$. Per la similitudine de' triangoli PGD , DHO (giacchè gl'angoli GDP , DOH non differiscono, se non per l'angolo infinitesimo DPH , e gl'angoli H , G sono retti) si averà $PG, GD :: DH, HO$; cioè $b, \sqrt{zz - bb} :: \frac{zdx}{y}, dz$, e però $dz = \frac{zdx \sqrt{zz - bb}}{by}$,

ma

ma $dz = dy$, dunque $dy = \frac{zdx \sqrt{zz - bb}}{by}$; e differen-

ziando, presa dx costante,

$$ddy = \frac{zbyzz - b'y - bz' + b'z \times dx dz}{bby \sqrt{zz - bb}}, \text{ mettendo } dz$$

in luogo di dy , e posto il valore di dz , avremo

$$ddy = \frac{zyz' - bbyz - z' + bbzz}{bby} \times dx^2, \text{ e finalmente}$$

furrogato il valore di $y = z \pm a$, farà

$$ddy = \frac{z^2 \pm 2az' \mp abbz}{bb \times z \pm a} \times dx^2.$$

La formola delle curve riferite al fuoco si è veduto, essere $dx^2 + dy^2 - yddy = 0$, o pure $= \infty$; adunque, posti i valori di y , di dy , e di ddy , farà

$$\frac{aabb \pm 3abbz \mp 2az' \times dx^2}{bb \times z \pm a} = 0, \text{ o pure } = \infty. \text{ La sup-}$$

posizione della formola eguale al zero ci dà $abb \pm 3bbz \mp 2z' = 0$.

Sia in primo luogo $a = b$, e si voglia considerare il ramo superiore, farà $z' - \frac{3aaz}{1} - \frac{a'}{2} = 0$, ed i tre

valori di z sono $z = -a$, $z = \frac{a - \sqrt{3aa}}{2}$, $z = \frac{a + \sqrt{3aa}}{2}$,

ma

ma è $y = z + a$, dunque sarà $y = 0$, $y = \frac{3a + \sqrt{3aa}}{2}$,

$y = \frac{3a - \sqrt{3aa}}{2}$. Il terzo valore a nulla serve, perchè

ci dà l'ordinata y minore di z , dove non è curva; il secondo ci dà la ordinata y , che incontra la curva nel punto del flesso contrario, per esempio M ; il primo ci viene somministrato anco considerando il ramo inferiore, e determina il punto P di regresso, ed infatti rispetto al ramo inferiore sarà $z' - \frac{3aa}{2} + \frac{a'}{2} = 0$,

cioè i tre valori $z = a$, $z = -\frac{a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; ma in que-

sto caso $y = z - a$, dunque avremo $y = 0$, $y = -\frac{3a \pm \sqrt{3aa}}{2}$; i due ultimi valori a nulla servono, che

ci danno y negativa, dove non è curva.

Riguardo agli altri due casi (*Fig. 57. 58.*) sarà $z' - \frac{3bbz}{2} \mp \frac{abb}{2} = 0$. Per avere le radici di questa

equazione, pongo $zz = \frac{bp}{2}$, luogo alla parabola apollonia-

na, e fatta la sostituzione, nasce il secondo luogo all'iperbola $pz - 3bz = \pm ab$, cioè positivo l'omogeneo di comparazione rispetto al ramo superiore, e negativo rispetto all'inferiore. Fra gli asintoti PQ , MN normali in A , si descrivano le opposte iperbole (*Fig. 77.*) negli

gli angoli PAN , MAQ , se l'omogeneo di comparazione è positivo; e negli angoli PAM , NAQ , se è negativo; e supposta b maggiore di a , sia $AB=b$, $BC=a$; passeranno l'iperbole per i punti C ; e presa $AM=3b$, dal punto M sull'asintoto MN sieno le p , indi al vertice M , asse MN , parametro b si descriva la parabola

EMD dell'equazione $zz = \frac{bp}{2}$. Poichè presa $p = Mb = 2b$,

la ordinata nella parabola è $z = b$ maggiore di a , cioè di (bc) , passerà essa parabola al di fuori de' punti C , e taglierà l'iperbole DC , CT ne' punti D , T , I , da quali condotte parallele all'asintoto QP le rette DH , TV , IO , faranno esse le tre radici della z nell'equazione $z' - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, cioè rispetto al ramo supe-

riore della concoide; ma $y = z + a$, dunque $DH + a$ sarà la ordinata y , che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio M . (Fig. 58.) L'altre due radici VT , OI a nulla servono, perchè essendo negative, ad VT aggiunta a , la differenza, cioè y sarà negativa, e ad OI aggiunta a , la differenza sarà positiva, ma minore di a ; ed alla y negativa, o minore di a non corrisponde in questo caso curva. Rispetto al ramo inferiore della concoide, cioè nell'equazione $z' - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$

le tre radici faranno OG , VK , HE , ma se dalla prima,

ma, e dalla terza si sottragga a per avere la y , la differenza sarà negativa, cioè y negativa, a cui non corrisponde curva, e però a nulla servono; se dalla seconda PK si sottragga a , la differenza LK sarà la ordinata y , che incontra la curva nel flesso contrario, per esempio, N .

Supposta b minore di a , la parabola passerà tra i punti c , C dell'iperbole GcK , ICT , e però i due valori negativi di z dell'equazione $z^2 - \frac{3bbz}{2} - \frac{abb}{2} = 0$, aggiungendo la a , daranno y minore di a , a cui non corrisponde curva; il terzo, aggiunta la a , darà la y , che incontrerà la curva nel flesso contrario, per esempio, M (Fig. 57.).

Rispetto al ramo inferiore, cioè all'equazione $z^2 - \frac{3bbz}{2} + \frac{abb}{2} = 0$, dalle due radici positive, che sono minori di b , sottratta a , e sottratta pure dalla radice negativa, avremo sempre y negativa maggiore di PK , a cui non corrisponde curva, e però il ramo inferiore della conoide quando b è minore di a , non ha ne flessi contrarij, nè regresi.

La supposizione della formola $= \infty$ ci dà in tutti tre i casi $z = \mp a$, e però $y = 0$; nella Fig. 58. a nulla serve il valore $y = 0$, perchè non è in curva; nelle Fig. 56. 57.

ci

ci dà la tangente in P , che è assieme punto di regresso nella Fig. 56., ma non già nella Fig. 57.

ESEMPIO V.

104. Sia il circolo AED descritto col centro B (Fig. 78.), e sia una curva AFK tale, che condotto un qualunque raggio BFE , sia sempre il quadrato FE eguale al rettangolo del corrispondente arco AE in una data retta b , e si voglia il flesso contrario della curva AFK .

Si chiami l'arco $AE=z$, $BA=BE=a$, $BF=y$, ed $FG=dx$, fatta Be infinitamente prossima a BE , e descritto col centro B , raggio BF l'archetto FG ; per la natura della curva sarà $bz=aa-2ay+yy$, e però differenziando, $b dz = -2ady + 2ydy$, onde $dz = \frac{2ydy - 2ady}{b} = Ee$.

Ma per i settori simili BEe , BFG , sarà $BE::BF::Ee, FG$, cioè $a, y :: \frac{2ydy - 2ady}{b}, dx$, dunque $dx =$

$\frac{2yydy - 2aydy}{ab}$, e differenziando, presa dx costante,

$$4ydy^2 + 2yyddy - 2ady^2 - 2ayddy = 0, \text{ onde } yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y-a}.$$

Nella formola generale delle curve riferite al fuoco $dx^2 + dy^2 - yddy$ si sostituiscano i valori di dx^2 , e di $yddy$ dati per dy , ed avremo

$$\frac{4y^2 dy^2 - 8ay^2 dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2 - ady^2 + ydy^2}{aabb \cdot y - a},$$

cioè, riducendo al comun denominatore,

$$\frac{4y^2 - 12ay^2 + 12aayy - 4a^2yy + 3aabby - 2a^2bb}{aabb \times y - a} \text{ eguale}$$

al zero, o all'infinito. Costruita per tanto l'equazione, una delle radici ci darà il valore dell'ordinata y , che incontra la curva nel punto del flesso contrario.



CAPO

C A P O V.

Delle Evolute, e de' Raggi Osculatori.

105. Sia la Curva BDF (Fig. 79.) involupata dal filo $ABDF$, cioè essendo il filo fisso nel punto immobile F per un' estremità, s'intenda disteso sopra la curva BDF , e la porzione AB cada sulla tangente AR della curva nel punto B . Si muova il filo per l'estremità A sviluppando la curva, ma in maniera, che sia sempre teso, ed incapace di distrazione: il punto A descriverà con questo moto la curva AHK .

La curva BDF si chiama l'evoluta della curva AHK , come è stato detto anche di sopra al num. 16., e la curva AHK dicefi la generata dallo sviluppo della BDF , e le porzioni AB , HD , KF del filo si dicono raggi dell'evoluta, o raggi osculatori.

106. Poichè la lunghezza del filo $ABDF$ è sempre la stessa, ne viene, che la differenza de' raggi osculatori AB , HD sarà eguale alla porzione BD della curva; siccome l'altra porzione DF è eguale alla differenza de' raggi HD , KF , e la curva intiera BDF eguale alla differenza de' raggi AB , KF ; e se il raggio AB fosse nullo, cioè, se il punto A cadesse in B , farebbe il raggio HD eguale alla porzione BD , ed il raggio FK a tutta la curva BDF .

107. Dalla generazione della curva AHK per lo sviluppo del filo chiaramente si vede, che ciascun raggio HD , KF nelle sue estremità D , F tocca l'evoluta BDF .

108. L'arco HK della curva AHK sia infinitesimo, farà pure infinitesimo l'arco DF dell'evoluta, e poichè è dimostrato nel corollario 4. del primo Teor. num. 6., che un qualunque archetto infinitesimo di curva à le stesse proprietà dell'arco di circolo; e nel Teorema 4. num. 15., che prodotto il raggio HD , sicchè incontri in S il raggio KF , sono SH , SK diverse tra loro solo per una quantità infinitesima del terzo grado, si possono dunque prendere per eguali SH , SK ; e però sono esse perpendicolari alla curva AHK ne' punti H , K . Ma le due HD , HS differiscono tra loro della DS infinitesima del primo ordine, ed è HD finita, dunque si potranno assumere per eguali; quindi per determinare un qualunque punto D nella curva evoluta, vale a dire, per determinare la lunghezza di un qualunque raggio osculatore HD , basterà, che data di posizione la perpendicolare HS della curva data AHK , (il che si à dal metodo delle tangenti) si determini il punto S , in cui essa si taglia con la perpendicolare infinitamente prossima KS . Ciò farassi nel seguente modo.

109. Sia in primo luogo la curva $DABE$ (Fig. 80.) riferita agli assi; i due archetti infinitesimi AB , BE , la perpendicolare BQ , e l'altra EQ , che la incontri nel
ricer-

ricercato punto Q . Chiamate al solito $DH=x$, $HA=y$, e condotte AF , BG parallele a DM , e la corda $PABC$, che incontri ME prodotta in C , e condotta l'altra corda EBR ; e col centro B , intervalli BE , BP , descritti gli archetti ES , PO , farà $AF=dx$, $FB=dy$, $AB=ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$; ma per lo Corollario 2. del Teorema 5. num. 19. sono simili i settori QBE , BES ; dunque, avremo $QB, BE :: BE, ES$, cioè $QB, ds :: ds, ES$, (chiamando ds l'elemento della curva) e però $QB = \frac{ds^2}{ES}$.

Ora poichè l'archetto PO si può prendere per il suo seno retto, (Corollario 1. del Teor. 3. num. 9.) saranno simili i triangoli RPO , BEG , e però $BE, EG :: RP, PO$, cioè $ds, dy :: RP, PO = \frac{RP dy}{ds}$; ma sono pure simili

i settori BPO , BES , e però farà $BP, PO :: BE, ES$, cioè $\frac{y ds}{dy}, \frac{RP dy}{ds} :: ds, ES = \frac{RP \times dy^2}{y ds}$, e finalmente

$$QB = \frac{y ds^3}{RP \times dy^2}, \text{ formola generale de' raggi osculatori ,}$$

in cui nulla altro rimane da farsi, che sostituire il valore della RP , differenza della $DP = \frac{y dx}{dy} - x$, secon-

do la diversa ipotesi della flussione prima, che si prende per costante.

Se nessuna flussione prima si assuma per costante, farà $RP = \frac{y dy dx - y dx dy}{dy^2}$, e però $QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dy dx - dx dy}$.
Se

Se si assuma costante dx , farà $RP = -\frac{y dx ddy}{dy^2}$,

$$\text{e però } QB = \frac{dx^2 + dy^2}{-dx ddy}^{\frac{1}{2}}.$$

Se si assuma costante dy , farà $RP = \frac{y ddx}{dy}$, e però

$$QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dx ddy}^{\frac{1}{2}}.$$

Se si assuma costante ds , cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, farà $dx ddx + dy ddy = 0$, e $-ddy = \frac{dx ddx}{dy}$, quindi $RP =$

$$\frac{y ddx \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy^2}, \text{ e però } QB = \frac{dy \sqrt{dx^2 + dy^2}}{ddx}, \text{ o pure}$$

furrogato il valore di ddx , $QB = \frac{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-ddy}$. Adun-

que nell'espressione di $QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dy ddx - dx ddy}^{\frac{1}{2}}$, in cui nes-

suna funzione è presa costante, basterà cancellare il termine ddx nella supposizione di dx costante; cancellare il termine ddy nella supposizione di dy costante; e porre in luogo di $-ddy$ il valore $\frac{dx ddx}{dy}$ nella supposizio-

ne di ds costante.

110. Può la curva essere riferita ad un diametro, vale a dire con le coördinate tra loro in angolo obbli-

bliquo. Sia DV l'assissa $= x$, $VK = dx$, VA l'ordinata $= y$, ed il rimanente, come sopra. Poichè è noto l'angolo DKB , sarà noto l'angolo BNF , e nota la ragione de' lati tra loro nel triangolo BNF , quindi essendo $NB = dy$, sarà data NF , ed FB , ed in conseguenza AB , o sia ds . Ma il triangolo RPO è simile al triangolo ABF , poichè gli angoli in O , ed F sono retti, e l'angolo ORP non è diverso dall'angolo FAB , che per l'angolo infinitesimo RBP ; adunque saranno date RP , PO , ed indi ES , e finalmente QB .

III. Dall'estremità del raggio osculatore BQ si tiri QT parallela all'asse DM , che incontra in T l'ordinata BI prodotta, la retta BT chiamasi *Sottosculatrice*, o *Co-raggio*. Dato il raggio BQ , è pure istessamente sempre dato il co-raggio BT , perchè dal metodo delle tangenti è data la normale Bm della curva, e però dalla similitudine de' triangoli BmI , BQT sarà data BT .

Ma se si voglia l'espressione del co-raggio indipendentemente dal raggio, si chiami $BT = z$. Il triangolo BTQ è simile al triangolo BGC , o sia BAF , perchè essendo retti i due angoli TBG , QBC , tolto il comune QBG , rimarranno eguali TBQ , CBG , e sono retti T , e C ; adunque sarà $dx, ds :: z, BQ = \frac{z ds}{dx} = z \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}$.

Ma per lo Teorema 4. num. 15., BQ è eguale ad EQ , perchè non differiscono tra di loro, se non per una quan-

quantità infinitesima del terzo grado, adunque sarà nulla la differenza di QB , e però differenziando, senza assumere flussione costante,

$$\frac{dx dz \times \overline{dx^2 + dy^2} + z dx^2 ddx + z dx dy ddy - z ddx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dx^2 \vee \overline{dx^2 + dy^2}} = 0$$

ma $dz = dy$, perchè è la stessa la differenza di TB , e di IB ; dunque $z = \frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dy ddx - dx ddy} = BT$, formola del

co-raggio, in cui nessuna flussione è stata assunta costante. Se sia dx costante, il termine $dy ddx$ farà nullo, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx^2 + dy^2}{- ddy} = BT$.

Se sia costante dy , farà nullo il termine $- dx ddy$, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dy ddx} = BT$.

Se sia costante l'elemento della curva, farà $- ddy = \frac{dx ddx}{ay}$, e però la formola in questa supposizione sarà $\frac{dx dy}{ddx} = BT$, surrogato il valore di ddy ; o pure $\frac{dx^2}{- ddy} = BT$, surrogato il valore di ddx .

Dato il co-raggio, per la similitudine de' triangoli BmI , BQT , sarà similmente dato il raggio QB .

112. Se le coordinate faranno tra loro in angolo obliquo, nell' analogia $dx, ds :: z, BQ$ in luogo delle

delle dx , e ds , basterà porre i rispettivi valori, che in questo caso convengono alle AF , AB , e fare il rimanente, come sopra, e si averà la formola del coraggio BT nel caso, che le coordinate sieno in angolo obbliquo.

113. In diverse altre maniere si può avere la stessa formola del raggio osculatore. Col centro Q , intervallo Qm si descriva l'archetto (mn) . Assumendo l'archetto infinitesimo (mn) per la tangente in n , saranno simili i due triangoli BCG , (mnq) , e però $BC, BG :: (mq), (mn)$; cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, $dx :: (mq), (mn) = (mq) \times \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ma (mq) è la differenza di Dm , cioè del

la sottornormale Im con l'assissa DI , o sia DH , cioè di $x + \frac{ydy}{dx}$; adunque differenziando nell'ipotesi di nessuna

flusione costante, farà

$$(mq) = \frac{dx^2 + ydxddy + dx dy^2 - ydydx}{dx^2}, \text{ adunque}$$

$$(mn) = \frac{dx^2 + ydxddy + dx dy^2 - ydydx}{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ ma per i set-$$

tori simili Qmn , QBE , farà $BE = (mn)$, $BE :: Bm$
 $(y \sqrt{dx^2 + dy^2})$, QB , cioè sostituiti i valori analitici,

$$QB = \frac{dx^2 + dy^2}{dy dx - dx dy} \frac{1}{2}, \text{ la qual formola modificata secondo}$$

la supposizione di una flussione costante ci darà l'espressione del raggio QB , che a tale supposizione corrisponde.

114. In altro modo ancora.

Si produca EM in t , BG in L . Poichè il triangolo EGL è simile al triangolo BIm , essendo gl'angoli GEL , IBm diversi fra loro del solo angolo infinitesimo BQE , sarà $GL = \frac{dy^2}{dx}$, e però $BL = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$,

ma si è veduto, essere $(mq) = \frac{dx^2 + ydxddy + dx^2dy^2 - ydyddx}{dx^2}$,

ed i triangoli simili QBL , Qmq ci danno $BL = (mq)$, $BL :: Bm$, BQ ; dunque sostituiti i valori analitici,

avremo $BQ = \frac{\frac{1}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{dx}}{dyddx - dxddy}$.

115. Prendansi ora le curve riferite al fuoco: e però sia (Fig. 81.) la curva BEG , il fuoco A ; e presi due archetti infinitesimi BE , EG , e condotte le ordinate AB , AE , AG , col centro A si descrivano gl'archetti BC , EF , ed alle corde GE , EB prodotte sieno perpendicolari AI , AD , e finalmente la corda DE prodotta incontri in L l'ordinata AG , e col centro E si descriva l'archetto GR . Sia $AB = y$, $CE = dy$, $BC = dx$, $AD = p$. Col centro A descritto l'archetto DH , sarà $HI = dp$, ma HM è quantità infinitesima del

del secondo grado; (Teor. 3. num. 8.) dunque si potranno prendere per eguali HI , IM , e però sarà $MI = dp$. La similitudine de' triangoli EBC , EAD ci dà $ED = \frac{ydy}{ds} = EI$, per esser diversa solo per un'

infinitesimo, ed assumendo l'archetto GR per la sua tangente, sono simili i triangoli EIM , EGR , quindi $GR = \frac{dpds}{ydy}$; ma condotte EQ , QG normali

alla curva ne' punti E , G , sono simili i settori QEG , EGR , dunque $QE = \frac{ydy}{dp}$. I triangoli simili EBC , EAD

ci danno $p = \frac{ydx}{ds} = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; e però differenziando,

senza prendere costante alcuna,

$$dp = \frac{y(dx' + dx dy' \times \frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - dx ddx - dy ddy \times \frac{y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}})}{\sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{cioè } dp = \frac{dx' dy + y dy' ddx + dx dy' - y dx dy ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}, \text{ onde}$$

sostituito questo valore in luogo di dp nell' espressione

$$\text{di } QE, \text{ sarà } QE = \frac{y \times \sqrt{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx' + y dy' ddx + dx dy' - y dx dy ddy}, \text{ for-}$$

mola generale del raggio osculatore per le curve rife-

rite al fuoco, presa nessuna flussione costante.

Se si voglia costante dx , preso il valore di dp in questa ipotesi, e sostituito; o pure senz'altro cancellato nella formola generale il termine $ydyddx$, sarà

$$QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 + dxdy^2 - ydxdy}$$

Se si voglia costante dy , cancellato nella formola generale il termine $-ydxddy$, sarà

$$QE = \frac{y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 + dxdy^2 + ydyddx}$$

E finalmente presa per costante ds , cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, avremo $ddx = -\frac{dyddy}{dx}$, e surrogato in luogo di ddx

questo valore nella formola generale, sarà

$$QE = \frac{ydx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 - yddy}, \text{ o pure surrogato il valore di } ddy,$$

$$QE = \frac{ydy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxdy + yddx}$$

116. Se in ciascheduna di queste formole si supporrà la y infinita, svaniranno tutti que' termini, ne quali essa non si ritrova, e le formole saranno le stesse delle ritrovate per le curve riferite agli assi, il che deve appunto succedere, poichè se la y è infinita, il punto A sarà infinitamente lontano, e però parallele le ordinate.

117. In altra maniera. All' archetto EG infinitesimo sia tangente ER nel punto E , (Fig. 82.) e sieno QE, QG due raggi osculatori, e si produca QG in R . Dal fuoco A si tiri AN normale a QG , ed AK normale a QE , e sia $EK = t$, farà $KM = dt$. Poichè il triangolo AKM è simile al triangolo QNM , e questo è simile al triangolo QER , farà $QE, ER :: AK, KM$, cioè $QE, ER :: AK, dt$; ma per i triangoli ELC , o sia EGC, EAK simili, è $AK = \frac{ydy}{dt}$, ed ER si può as-

sumere per EG , dunque farà $QE, ds :: \frac{ydy}{dt}, dt$, e però

$QE = \frac{ydy}{dt}$, ma $EK = t = \frac{ydx}{dt}$, dunque fatto il rimanen-

te, come sopra, cioè preso differenziando il valore di dt , e sostituito nell' espressione di QE , si avranno le stesse formole.

118. Fatta QP normale ad EA prodotta in P , faranno simili i triangoli EAK, EQP , e però $EA, EK :: EQ, EP$; ma si è veduto, essere $EQ = \frac{ydy}{dt}$, dunque

$y, t :: \frac{ydy}{dt}, EP = \frac{tdy}{dt}$, e surrogato in luogo di t il va-

lore $\frac{ydx}{dt}$, ed in luogo di dt il differenziale

$\frac{dx^2 dy + y dy^2 dx + dx dy^2 - y dx dy dy}{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}$, senza assumere

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2}$$

flu-

flusione costante, farà $EP =$

$$\frac{y dx ds^2}{dx ds^2 + y dy dx - v dx dy} = \frac{y dx^2 + v dx dy^2}{dx^2 + dx dy^2 + y dy dx - y dx dy}$$

formola generale del co-raggio, in cui nessuna flusione è presa costante, dalla quale modificata si ricavano le altre, che alle supposizioni di differenziale costante corrispondono, e se in queste si supporrà la y infinita, cioè, se si cancelleranno que' termini, ne quali essa non trovasi, si averanno le stesse formole, che si sono ritrovate per le curve riferite agl'assi.

119. Poichè, qualunque siasi la curva, si ritrova una sola espressione del raggio osculatore, e del co-raggio sì nelle curve riferite agl'assi, come in quelle riferite al fuoco, ne viene, che qualunque curva non potrà avere, che una sola evoluta.

120. Data adunque, per mezzo di un'equazione qualunque, la curva, di cui si vuole il raggio osculatore, o co-raggio; converrà differenziare l'equazione a fine di avere i valori di dy , dy^2 , e ddy dati per dx , o di dx ec. dati per dy , e sostituirli nelle ritrovate formole, con che si averà l'espressione in termini finiti, e affatto liberi dai differenziali, del raggio osculatore, o co-raggio della proposta curva.

121. Se il valore del raggio osculatore, o del co-raggio farà positivo, dovranno essi prenderli dalla parte

te

te dell'asse DM , (*Fig. 80.*) o del fuoco A (*Fig. 81.*), come ô fin'ora supposto, e la curva sarà concava a quest'asse, o fuoco; ma se sarà negativo, dovranno essi prenderfi dalla parte opposta, ed in questo caso la curva sarà convessa. Da ciò ne segue, che nel punto del flesso contrario, o regresso, se la curva ne â, il co-raggio dovrà farsi da positivo negativo, e due raggi osculatori infinitamente prossimi dall'essere convergenti passeranno ad essere divergenti. Ma ciò non può essere, se essi non divengano prima paralleli, vale a dire infinito il raggio dell'evoluta in quel punto, o pure se essi non cadano prima l'uno sopra dell'altro, e così si faccia nullo il raggio dell'evoluta. Egli è assai chiaro, che quando l'evoluta sia tale, che i raggi vadano sempre crescendo accollandosi al punto del flesso contrario, o regresso B , (*Fig. 83.* , e *84.*) per passare ad essere da convergenti divergenti, dovranno farsi prima paralleli, essendo AD , FE l'evoluta della curva ABF . Ma se l'evoluta della curva ABF (*Fig. 85.* , e *86*) sarà DBE , sviluppandosi il filo dal punto B , e andando verso A rispetto alla porzione BA della curva, ed andando verso F rispetto alla porzione BF , poichè è sempre il raggio minore, quanto più è vicino al punto B ; converrà, che si faccia nullo prima di passare dall'esser positivo ad esser negativo.

ESEMPIO I.

122. La curva AB (Fig. 87.) sia la parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, di cui si voglia il raggio osculatore ad un qualunque punto B . Differenziando sarà $adx = 2ydy$, e differenziando di nuovo, presa dx costante, se così piace, $2dy^2 + 2yddy = 0$, ma $dy = \frac{adx}{2y}$, dunque $d^2y = -\frac{aady^2}{4y^3}$. Sostituiti per tanto questi valori nella formola del co-raggio $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, farà $\frac{4y^3 + aay}{aa} = BE$, o pure, posto in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

Dal punto B si tiri la tangente BT , che incontra l'asse in T , e dal punto T si conduca TE parallela alla normale BM ; incontrerà essa la BP prodotta nel ricercato punto E . Imperciocchè essendo l'angolo BTE retto, farà $BP, PT :: PT, PE$, cioè per la proprietà della parabola, $\sqrt{ax}, 2x :: 2x, PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; adunque $BP + PE$, cioè $BE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} + \sqrt{ax}$.

De-

Determinata BE , si conduca EQ parallela all'asse AP , la normale BQ prodotta incontrerà EQ nel punto Q , che farà all'evoluta.

O pure, a cagione de' triangoli simili BPM , BEQ , farà $BP, PM :: BE, EQ$; ma per la proprietà della parabola è $PM = \frac{1}{2}a$, dunque $\sqrt{ax}, \frac{1}{2}a :: \frac{4x\sqrt{ax} + \sqrt{ax}}{2}$.

$\sqrt{ax}, EQ = 2x + \frac{a}{2} = PK$; dunque $MK = 2x$. Presa

per tanto MK doppia di AP , o sia $PK = TM$, e condotta KQ parallela a PB , incontrerà essa la normale BM prodotta nel punto Q , che farà all'evoluta: E poichè $BP, BM :: BE, BQ$, e $BM = \sqrt{4xx + aa}$, farà

$$\sqrt{ax}, \frac{\sqrt{4ax + aa}}{2} :: \frac{4x\sqrt{ax} + \sqrt{ax}}{2}, BQ = \frac{4xx + aa}{2a},$$

raggio osculatore.

Prendo la formola $\frac{dx^2 + dy^2}{dx dy}$ del raggio oscula-

tore, fatte le sostituzioni, farà $QB = \frac{4yy + aa}{2a} =$

$$\frac{4xx + aa}{2a}, \text{ come prima.}$$

Passando alle seconde differenze dell'equazio-

Tom. II.

X

ne

ne $ax = yy$, senza prendere alcuna flussione costante; poichè $adx = 2ydy$, farà $addx = 2yddy + 2dy^2$, e $ddy = addx - 2dy^2$. Quindi presa la formola del raggio oscu-

culatore $\frac{dx^2 + dy^2}{dyddx - dxddy}^{\frac{3}{2}}$, che a questo caso conviene, e

fatta la sostituzione del valore di ddy , farà $QB =$

$\frac{2y \times \frac{dx^2 + dy^2}{2}^{\frac{3}{2}}}{2yddx - adxddy + 2dx dy^2}$, e finalmente posti i valo-

ri di y , e di dy , $QB = \frac{41x + aa^{\frac{3}{2}}}{2aa}$, come sopra.

Si troverà la stessa cosa nell'altre supposizioni di dy , o di ds costanti, il che ometto di fare per brevità.

Se si volesse il raggio osculatore ad un determinato punto della curva, basterà sostituire nell'espressione finita già ritrovata del raggio osculatore per un qualunque punto il valore della x , che a tale determinato punto conviene. Così se si voglia il raggio osculatore nel vertice A , o sia il punto N , in cui l'asse AN della parabola tocca l'evoluta NQ : poichè nel vertice A è $x = 0$,

cancellato il termine $4ax$ nell'espressione $\frac{41x + aa^{\frac{3}{2}}}{2aa}$

del raggio osculatore, avremo $AN = \frac{a}{2}$, il che non

può

può essere altrimenti, essendo in questo caso il raggio AN lo stesso, che la sottornormale, la quale nella parabola si fa essere sempre la metà del parametro.

123. Sarà ora facile il ritrovare l'equazione alla Cartesiana dell'evoluta NQ , o sia la relazione delle ordinate NK , KQ nel seguente modo.

Si chiami $NK = u$, $KQ = t$. Poichè $KQ = PE = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, avremo l'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, ma $AK = AP + PK = 3x + \frac{1}{2}a$, ed $AN = \frac{1}{2}a$; dunque $NK = 3x = u$, ed $x = \frac{u}{3}$, e però posto in luogo di x questo valore nell'equazione $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, avremo $t = \frac{4u\sqrt{\frac{au}{3}}}{a}$,

e quadrando, $27at = 16u^2$, equazione alla seconda parabola cubica del parametro $= \frac{27a}{16}$, la quale esprime

la relazione delle coordinate NK , KQ , ed è l'evoluta della proposta parabola apolloniana.

Egli è manifesto, che la seconda parabola cubica intiera farà l'evoluta dell'intiera parabola apolloniana, cioè che (Fig. 88.) il ramo NQ farà l'evoluta della parte superiore AB , ed il ramo Nq della inferiore Ab ; e che i due rami Nq , NQ si voltano le convessità, ed hanno un regresso in N .

124. E' pure manifesto, che se le curve proposte

sono algebrache, saranno pure algebrache le loro evolute, e si potrà sempre avere l'equazione in termini finiti esprimenti la relazione delle coordinate, e che inoltre esse evolute saranno rettificabili, cioè si potranno ritrovare delle rette linee eguali ad una qualunque porzione delle medesime, per esempio NQ . Imperciocchè, se la proposta curva AB è algebrica, si avranno sempre in termini finiti i raggi osculatori BQ , AN , e da BQ sottratto AN , il residuo sarà l'arco NQ .

E S E M P I O I I.

125. Sia la curva MBM (Fig. 89.) l'iperbola fra gli asintoti, dell'equazione $aa = xy$. Differenziando, $x dy + y dx = 0$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $ddy = -\frac{2xdy}{x}$. Sostituiti i valori di dy , e ddy

nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, avremo $BE = \frac{xx + yy}{-2y}$, valore negativo. Se adunque sia $AP = x$,

$PB = y$, nella prodotta AB presa $BN = \frac{1}{2} BA = \sqrt{\frac{xx + yy}{2}}$,

ed alzata normale NE , che incontri la ordinata BP prodotta in E , farà BE il co-raggio, che si cerca; imperciocchè, per la similitudine de' triangoli BPA , BNE ,

farà

farà $BP, BA :: BN, BE$, cioè $y, \sqrt{xx+yy} :: \sqrt{xx+yy}$,

$BE = \frac{xx+yy}{2y}$, e perchè si prende dalla parte de' ne-

gativi, $BE = -\frac{xx+yy}{2y}$. Quindi condotta EQ parallela

ad AP , e prodotta in Q la normale FB alla curva nel punto B , farà BQ il raggio osculatore, ed il punto Q nell'evoluta.

Per determinare il raggio osculatore nel vertice D dell'iperbola, si ponga $x = AH = a$, e però $y = HD = a$, adunque il co-raggio $\frac{xx+yy}{-2y}$ nel vertice D farà $= -a$,

ed il raggio $= -\sqrt{2aa}$.

Per poco, che si rifletta alla figura della curva MBM , si vede, che l'evoluta averà due rami con un punto di regresso in L , in cui il raggio DL converrà, che sia il minimo di tutti i raggi BQ ; e però differen-

ziando la formola de' raggi osculatori $\frac{dx^3+dy^3}{-dx dy}$, la

differenza dovrà essere nulla, o infinita; cioè, suppo-

$$-\frac{3dx dy ddy^2 \sqrt{dx^2+dy^2} + dx ddddy \times \frac{dx^2+dy^2}{2}}{dx^2 ddy^2} = 0,$$

o pure $=$ all'infinito, e dividendo per $\sqrt{dx^2+dy^2}$, e mol-

moltiplicando per $dxddy^2$, farà $dx^2 ddy + dy^2 ddd - 3dyddy^2 = 0$, o pure $= \infty$. Ma per l'equazione della curva, si à $dy = -\frac{aadx}{xx}$, $ddy = \frac{2aadx}{x^3}$, $ddd = -\frac{6aadx^2}{x^4}$;

dunque fatte le sostituzioni, e supposta la detta quantità eguale a zero, avremo $x = a = AH$; vale a dire, che il regresso farà nel raggio osculatore al vertice D della curva; ma si è veduto, essere esso raggio $= -\sqrt{2aa}$, farà dunque $DL = -\sqrt{2aa} = DA$.

Nella formola de' raggi osculatori, surrogati i valori

di dy , e di ddy , avremo $BQ = \frac{xx+yy}{-xy}^{\frac{3}{2}} = \frac{xx+yy}{-aa}^{\frac{3}{2}}$,

e però differenziando, a fine di avere il minimo raggio, cioè il punto di regresso L , farà

$3x dx + 3y dy \sqrt{xx+yy} = 0$, e posto in luogo di dy il suo valore, farà $3xx dx - 3yy dx \sqrt{xx+yy} = 0$, cioè $x = y = a$, e sostituito questo valore nell'espressione del raggio osculatore, farà esso $= -\sqrt{2aa} = DL$, come sopra.

In altro modo ancora si può costruire il raggio BQ . Poichè $ddy = -\frac{2dxdy}{x}$, sostituiti in luogo di x , e di dx i valori dati per y , farà $ddy = \frac{2dy^2}{y}$, e però il co-rag-

gio

gio $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$, e per i triangoli simili BPF ,

BEQ , avremo $EQ = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Si conduca ora

al punto B la tangente BT , e dal punto T la TS normale a BT , o sia parallela a BQ , e si prenda $BE =$

$\frac{1}{2} BS$, o $PK = \frac{1}{2} FT$; se si farà EQ parallela alla AT ,

o KQ perpendicolare, esse incontreranno la normale

BQ nel punto Q dell' evoluta, poichè sarà $BS =$

$\frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$, dunque $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$; sarà ancora

$FP + PT = FT = -\frac{ydy}{dx} - \frac{ydx}{dy}$, dunque $EQ =$

$-\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$.

Se l'equazione sarà $y^m = x$, la quale esprime tutte le parabole all' infinito, quando sia m numero positivo, ed in conseguenza anche la parabola dell' esempio primo; ed esprime tutte le iperbole fra gli asintoti all' infinito, quando sia m negativo, e però anche quella di questo esempio: differenziando avremo $my^{m-1} dy = dx$, e di nuovo differenziando, supposta dx costante, $m \frac{dy}{dy} - m \times y^{m-2} dy^2 + my^{m-1} ddy = 0$, e dividendo per my^{m-1} , sarà $-ddy = \frac{m-1}{y} \times \frac{dy^2}{y}$. Presa pertanto

la

la formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, e fatta la sostituzione del valore di ddy , si averà $BE = \frac{ydx^2 + ydy^2}{m-1 \times dy^2}$, e però EQ , o $PK = \frac{ydx}{m-1 \times dy} + \frac{ydy}{m-1 \times dx}$.

Dal punto T , in cui (Fig. 87., e 89.) la tangente BT incontra l'asse AP , si tiri istessamente TS parallela alla normale BQ alla curva, che incontra in S la ordinata BP prodotta, indi si prenda $BE = BS$ dal-

la parte dei negativi, se m sia numero negativo, come nelle iperbole le quali sono all'asse AP , cioè all'asintoto convessa (Fig. 89.); si prenda BE dalla parte dei positivi, se m sia numero positivo, e maggiore dell'unità, come nelle parabole (Fig. 87.) concave all'asse AP , e dalla parte dei negativi, se m positivo sia minore dell'unità, nel qual caso le parabole sono convesse all'asse AP .

Per determinare il punto, in cui l'asse della parabola tocca l'evoluta, prendo la formola de' raggi oscu-

latori $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}$, da cui, sostituiti i valori di $dx = my^{m-1}dy$, e di $-ddy = \frac{m-1 \times dy^2}{y}$, avere-

mo

mo $BQ = \frac{mny^{2m-2} + 1}{m \times m - 1 \times y^{m-2}}^{\frac{1}{2}}$, intendendo, che l'unità

supplisca per la legge degl' omogenei; quindi supposta m maggiore dell'unità, acciò sieno concave le parabole all'asse AP , se sarà m minore di 2, la y del denominatore passerà ad essere un moltiplicatore del numeratore, e però fatta $y = 0$, come richiede il caso, che si cerca, sarà $BQ = 0$, cioè l'asse toccherà l'evoluta nel vertice A della parabola, come farebbe per esempio la seconda parabola cubica $axx = y^3$ (Fig. 70.).

Che se m è maggiore di 2, la y del denominatore sarà elevata a potestà positiva, e però fatta $y = 0$, sarà BQ infinita, vale a dire che l'asse della parabola sarà asintoto dell'evoluta; come la prima parabola cubica AB , (Fig. 90.) il di cui asse AP è asintoto dell'evoluta LQ .

L'evoluta CLQ della semi-parabola cubica ABM dell'equazione $axx = y^3$ à un punto di regresso L , e però due rami LQ , LC ; sviluppando il ramo LQ , si genera la porzione BA ; sviluppando il ramo LC , la porzione infinita BM .

Per determinare il flesso contrario L , prendo il valore del raggio osculatore, che in questa curva è

$$= \frac{9y^2 + a^2}{6ay}^{\frac{1}{2}}, \text{ il quale deve essere un minimo,}$$

Tom. II.

Y

c

e però differenziando

$$3 \times \frac{18a^4 y^4 dy \times \frac{1}{9y^4 + a^4} - a^4 dy \times \frac{1}{9y^4 + a^4}}{6a^4 yy} = 0,$$

cioè $45y^4 - a^4 = 0$, quindi $y = \sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$, e surrogato que-

sto valore in luogo di y nell'equazione $axx = y^4$, avremo $x = \sqrt[4]{\frac{a^4}{9 \cdot 1125}}$. Prefa adunque $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{9 \cdot 1125}}$, e con-

dotta l'ordinata PB , il punto di regresso L farà nella normale al punto B della curva; e nell'espressione del raggio osculatore posto $\sqrt[4]{\frac{a^4}{45}}$ in luogo di y , avremo il valore di BL .

In altro modo. Differenziando l'equazione $axx = y^4$, o sia $y = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, farà $dy = \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dx$, $ddy = -\frac{2}{9} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{5}{3}} dx^2$, $ddy = \frac{10}{27} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{8}{3}} dx^3$, posta dx costante; quindi, presa la formola $dx^2 ddy + dy^2 ddy - 3dy ddy^2 = 0$, e sostituiti i valori, si averà $AP = \sqrt[4]{\frac{a^4}{9 \cdot 1125}}$.

ESEM-

ESEMPIO III.

126. Sia la curva ABD (Fig. 91.) un'ellissi, o un'iperbola, il di cui asse $AH = a$, ed il parametro $AF = b$, $AP = x$, $PB = y$, e l'equazione

$$y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{a}}. \text{ Differenziando, far\`a } dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{abx \mp abxx}}$$

$$\text{e } ddy = \frac{-a^1bbdx^2}{4 \times \frac{abx \mp abxx}{2}^{\frac{3}{2}}}, \text{ presa } dx \text{ per costante.}$$

Fatte le sostituzioni nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}$ del raggio osculatore, far\`a

$$BGQ = \frac{4abx \mp 4abxx + abb \mp 4abbx + 4bbxx}{2a^1bb}^{\frac{3}{2}}. \text{ Ma}$$

la normale BG si trover\`a essere

$$= \frac{4abx \mp 4abxx + abb \mp 4abbx + 4bbxx}{2a}^{\frac{1}{2}}, \text{ dunque sa-$$

r\`a il raggio $BGQ = 4 \frac{BG}{bb}$; adunque preso il param-

etro b per primo termine, la normale BG per secon-

do, e continovata la serie geometrica, il quadruplo

Y 2

del

del quarto termine farà il raggio osculatore BQ :

Fatta $x = 0$ nella espressione del raggio osculatore, sarà $BGQ = AM = \frac{b}{2}$, e fatta $x = AO = \frac{1}{2}a$, si avrà nell'ellissi $BGQ = DOQ = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, cioè eguale alla

metà del parametro dell'asse conjugato, ed in Q vi sarà un regresso, e l'evoluta della porzione $AD = DH$ farà MQ ; della porzione DH farà RQ ; ma nell'iperbola il raggio si estende all'infinito.

Se nell'ellissi si faccia $a = b$, il raggio osculatore BGQ farà $= \frac{a}{2}$, qualunque siasi il punto B ; dun-

que i raggi tutti eguali tra loro, e l'evoluta un punto, cioè a dire l'ellissi, che in questo caso diviene un circolo, à per evoluta il suo centro.

ESEMPIO IV.

127. Sia la curva ABD (Fig. 92.) la logaritmica ordinaria, la di cui equazione è $\frac{ady}{y} = dx$.

Differenziando, presa dx costante, sarà $ddy = \frac{dx dy}{a} = \frac{y^2 dx^2}{aa}$, posto il valore di dy . Fatte le sostituzio-

ni

ni nella formola $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ del co-raggio, avremo

$BE = \frac{aa - yy}{y}$, e perchè nella logarithmica si trova, essere la fottonormale $PH = \frac{yy}{a}$, farà $EQ = -a - \frac{yy}{a}$.

Presa adunque $PK = TH$, ed alzata in angolo retto KQ , incontrerà essa la normale HBQ nel ricercato punto Q dell'evoluta.

Se si voglia determinare il punto della massima curvatura nella logarithmica, cioè il punto del minimo raggio osculatore, fatte le sostituzioni nella formola

$\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}$ del raggio osculatore, farà $\frac{aa + yy^2}{-ay}$, e

differenziando farà

$$-3ayyydy \times \frac{1}{aa + yy^2} + ayy \times \frac{1}{aa + yy^2} = 0, \text{ e però}$$

$$PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}.$$

O pure, presa la formola del num. 125. $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyd.dy^2 = 0$, e fatte le sostituzioni di $dy = \frac{ydx}{a}$, di $ddy = \frac{ydx^2}{a^2}$, di $ddy = \frac{ydx^3}{a^3}$, troveremo itef-

$$\text{famente } PB = y = \sqrt{\frac{aa}{2}}.$$

ESEM-

ESEMPIO V.

128. Sia ABD (Fig. 93.) la logaritmica spirale, la di cui proprietà è, che condotta ad un qualunque punto B la tangente BT , e dal polo A la ordinaria AB , l'angolo ABT sia sempre lo stesso, e però fatta AM infinitamente prossima ad AB , sarà costante la ragione di MR ad RB , quindi posta $AB = y$, l'archetto $BR = dx$, l'equazione sarà $adx = bdy$, e differenziando, fatta dx costante, $ddy = 0$. Presa pertanto la formola del co-raggio num. 118.

$$\frac{y \cdot dx^2 + y dx dy^2}{dx^3 + dx dy^2 + y dy dx^2 - y dx dy^2}, \text{ per le curve riferite}$$

al fuoco, la quale regolata nell'ipotesi di dx costante è $\frac{y \cdot dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2 - y ddy}$, e cancellato in questa il termine

$y ddy$, perchè la curva ci dà $ddy = 0$, e fatta la sostituzione del valore di dx , o di dy , ovvero diviso il numeratore, e denominatore per $dx^2 + dy^2$, sarà il co-raggio $BA = y$.

Adunque, condotta AC normale ad AB , incontrerà essa la perpendicolare BC nel ricercato punto C

dell'

dell'evoluta, e perchè la sottotangente $AC = \frac{ay}{b}$, farà

$$BC = y \sqrt{\frac{aa + bb}{b}}.$$

Condotta la tangente BT alla curva nel punto B , faranno simili i triangoli TCB , CBA , e però eguali gl'angoli TBA , ACB ; ma l'angolo TBA è sempre costante, dunque lo sarà ancora l'angolo ACB ; e però l'evoluta AC farà la stessa logaritmica spirale ABD , ma inversamente posta.

ESEMPIO VI.

129. Sia ABD (Fig. 93.) la spirale iperbolica, la di cui proprietà è, che la sottotangente sia costante:

Fatte dunque le stesse cose dell'Esempio antecedente, l'equazione della curva sarà $\frac{y dx}{x} = a$, o sia

$y dx = a dy$; quindi differenziando, posta dx costante, $d dy = \frac{dx dy}{a}$. Presa per tanto la formola del co-raggio,

che all'ipotesi di dx costante corrisponde, cioè

$$\frac{y dx^2 + y dy^2}{dx^2 + dy^2 - y ddy}, \text{ indi sostituito in luogo di } d dy \text{ il valo-}$$

re

re $\frac{dx dy}{a}$, ed in luogo di dy il valore $\frac{y dx}{a}$ dato dall'equazione, farà il co-raggio $= y \times \frac{aa + yy}{a}$.

Ma poichè la sottotangente AT è $= a$, e la sottotangente normale $AC = \frac{yy}{a}$, farà $TC = \frac{aa + yy}{a}$; dunque la quarta proporzionale della sottotangente TA , e della TC , e dell'ordinata AB ci determina il co-raggio. Quindi dal punto C condotta parallela alla tangente BT la CQ , che taglia in Q la ordinata BA prodotta, farà BQ il ricercato co-raggio.

Poichè per i triangoli simili BAT , CAQ , si avrà $CA, AQ :: TA, AB$, e permutando $CA, TA :: AQ, AB$, e componendo $TC, AT :: QB, AB$, ed invertendo $TA, TC :: BA, BQ$; il che ec.

E S E M P I O VI.

130. Sia il settore di circolo ADN , (Fig. 94.) e condotto dal centro A un raggio qualunque ABP , si faccia $ND, NP :: \overline{AP}^m, \overline{AB}^m$, il punto B farà nella curva ABD , che è una delle spirali all'infinito, la di cui equazione, fatto $NPD = b$, $NP = z$, il raggio

gio $AP = a$, $AB = y$, farà $y^m = \frac{a^m z}{b}$, e differenzian-

do, $my^{m-1} dy = \frac{a^m dz}{b}$. Ma condotto il raggio Ap

infinitamente prossimo ad AP , e chiamata $BR = dx$, per i settori simili APp , ABR , farà $dz = \frac{a dx}{y}$,

quindi posto questo valore in luogo di dz nell'equazione differenziale, farà $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$, e pe-

rò di nuovo differenziando, presa dx costante, ; $mmy^{m-1} dy^2 + my^m ddy = 0$, cioè $yddy = -m dy^2$.

Fatta pertanto la sostituzione di questo valore, e del valore di dx nella formola del co-raggio, farà $BE =$

$y \times \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m+1} + m \times a^{2m+2}}$. Si faccia TAC perpendi-

colare ad AB , e si tiri la tangente BT della curva in B , e BC normale, farà $AT = \frac{mby^{m+1}}{a^{m+1}}$, $AC =$

$\frac{a^{m+1}}{mby^{m-1}}$, e però $TC = \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mba^{m+1}y^{m-1}}$, quindi la

quarta proporzionale di $TA + m + 1 \times AC$, di TC , e di AB farà $y \times \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m+1} + m \times a^{2m+2}} = BE$, e però

$$y \times \frac{mmbby^{2m} + a^{2m+2}}{mmbby^{2m+1} + m \times a^{2m+2}}$$

Terza. II.

Z.

con-

condotta EQ parallela alla TC , incontrerà la normale BC nel punto Q , che farà all'evoluta.

ESEMPIO VII.

1311. Sia la curva ABD (Fig. 95.) la metà della cicloide ordinaria, la di cui equazione $dy = dx \sqrt{2a - x}$, essendo $AC = 2a$, $AP = x$, $PB = y$.

Differenziando, presa dx costante, farà $ddy = -\frac{adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$, e posti quelli valori nella formola

del raggio osculatore $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{1}{2}}$, farà $BQ =$

$2\sqrt{4ax - 2ax}$; ma la normale $BG = \sqrt{4ax - 2ax} =$ alla corda EC , dunque il raggio osculatore $BQ = 2BG = 2EC$.

Fatta $x = 0$, per avere il raggio osculatore nel punto A , farà $BQ = AN = 4a$, e però $CN = CA = 2a$.

Fatta $x = 2a$, il raggio osculatore nel punto D farà $= 0$, e però l'evoluta principia in D , e termina in N .

Poichè

Poichè la tangente in B della cicloide è parallela alla corda EA , (num. 47.) farà la normale BQ parallela alla corda EC . Ciò poſto, ſi compiſca il rettangolo $DCNS$, ed al diametro $DS=CN=AC$ ſi deſcriva il ſemicircolo DIS , e ſi tiri la corda DI parallela alla BQ , o ſia alla EC . Saranno gl' angoli CDI , DCE eguali, e per conſeguenza gl' archi DI , CE , e le corde; dunque DI , GQ eguali, e parallele, e condotta IQ , farà eſſa eguale, e parallela a DG ; ma per la proprietà della cicloide, la DG è eguale all'arco EC , e però all'arco DI , dunque l'arco $DI=IQ$, ed il ſemicircolo $DIS=SN$, quindi l'evoluta DQN è la ſteſſa cicloide DBA inverſamente poſta.

132. Avuta ſufficiente notizia; e ritrovate le formole de' raggi oſculatori, non è difficile il ritrovare la formola de' regreſſi della ſeconda ſpecie di ſopra promeſſa al num. 98.

Sia la curva BAC (Fig. 96.) con un fleſſo contrario in A , e ſi ſviluppi dal filo principiando in un qualunque punto D diverſo dal fleſſo contrario A . Lo ſviluppo della porzione DC genera la curva DG ; quello della porzione DA la curva DE ; e quello della porzione AB la curva EF di modo, che lo ſviluppo di tutta la BAC formerà la intera curva $FEDG$;

la quale à due regressi, uno in D della solita forma, poichè i due rami DE , DG si voltano le convessità, l'altro in E della seconda sorta, per essere i due rami ED , EF concavi verso la stessa parte. Sieno NM , Nm due qualunque raggi infinitamente prossimi dell'evoluta DA , ed NH , nH due normali alla stessa, faranno simili i due settori infinitesimi NmM , HNn , quindi HN , $NM :: Nn$, Mm ; ma nel punto del flesso contrario A , il raggio HN (num. 121.) deve essere o infinito, o eguale al zero, ed il raggio NM , che diventa AE , rimane finito, adunque nel caso del flesso contrario A , cioè nel punto del regresso E della seconda sorta, la ragione di Nn , Mm , vale a dire la ragione della differenziale del raggio MN all'elemento della curva, deve essere infinitamente grande, o infinitamente piccola. Ma la formola del raggio MN

$$\text{è } \frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{1}{2}}, \text{ presa } dx \text{ costante, il di cui differenzia-}$$

$$\text{le è } -\frac{3dxddydy^2 \vee dx^2 + dy^2 + dxddy \times \frac{dx^2 + dy^2}{dxddy}^{\frac{1}{2}}}{dx^2ddy^2},$$

ed $Mm = \vee dx^2 + dy^2$, dunque
 $\frac{Nn}{Mm} = \frac{dx^2ddy + dy^2ddy - 3dyddy^2}{dxddy^2} = \text{al zero, o all'in-}$
 finito, formola per i regressi della seconda sorta.

Questa

Questa formola è la stessa della ritrovata al num. 125., ma in quel luogo essa serve per i regressi della prima sorta delle evolute , e questa per i regressi della seconda sorta delle curve genite dell'evolute , essendo x , ed y le coordinate nell'uno , e nell' altro caso delle curve genite .

FINE DEL SECONDO LIBRO .



INSTITUZIONI
ANALITICHE

LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO TERZO

Del Calcolo Integrale.

IL Calcolo Integrale, che suole dirsi ancora calcolo sommatorio, è un metodo di ridurre una quantità differenziale a quella quantità, di cui essa è la differenza, onde le operazioni del calcolo integrale sono opposte a quelle del differenziale, e però si chiama ancora metodo inverso delle flussioni, o sia delle differenze. Per cagion d'esempio il differenziale di x è dx , e per conseguenza x è l'integrale di dx . Quindi sarà segno sicuro, che sia giusto quell'integrale, che differenziato restituirà la quantità proposta da integrarsi. In due diverse maniere si ricercano gl'integrali delle formole differenziali, in una per mezzo di espressioni finite algebriche, o ridotte a quadrature, supposte; nell'altra facendo uso delle serie. Delle regole della prima maniera tratterò nel primo Capo; dell'altra nel secondo, a cui aggiungerò il terzo dell'uso di esse regole per le rettificazioni di curve, quadrature di spazj ec., e finalmente il quarto, che tratterà del Calcolo Esponenziale.

C A P O I

*Delle regole dell' integrazioni espresse da formole finite
algebraiche , o ridotte a quadrature supposte .*

1. Come nelle quantità incomplete elevate a qualunque potenza il differenziale loro è il prodotto dell' esponente della variabile nella variabile stessa elevata alla medesima potenza diminuita dell'unità , e moltiplicata nella sua differenza ; così l' integrale del prodotto d'una variabile elevata a qualunque potenza nella differenza della stessa variabile è la variabile elevata alla potenza , il di cui esponente sia accresciuto dell'unità , divisa per lo stesso esponente così accresciuto , e ciò qualunque siasi l' esponente della potenza della variabile nella formola differenziale , cioè positivo , o negativo , intero , o rotto . Per esempio l' integrale di $mx^{m-1}dx$ farà $\frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1}$, cioè x^m . L' integrale di $x^{\frac{\pm m}{n}} dx$ farà egli $x^{\frac{\pm m}{n} + 1}$, cioè $\frac{nx^{\frac{\pm m}{n} + 1}}{\frac{\pm m}{n} + 1}$.

2. Nè punto alterano la regola le quantità costanti incomplete , o complesse , per le quali sia moltiplicata , o divisa la formola differenziale , rimanendo esse nell'

nell' integrale, quali erano nella formola differenziale, e però l'integrale di $\frac{aax^n dx}{mb - cc}$ farà $\frac{aax^{n+1}}{n+1 \times mb - cc}$.

3. Che se la formola differenziale farà una frazione, il di cui denominatore sia pure una qualunque potestà della variabile moltiplicata ancora, se si vuole, per qualunque costante, come a dire la formola $\frac{x^m dx}{aax^n - bbx^n}$,

cioè $\frac{x^m dx}{aa - bb \times x^n}$, come che essa è la medesima di

questa $\frac{x^{m+n} dx}{aa - bb}$, farà perciò soggetta alla data regola.

4. Ma qui fa d'uopo avvertire, che acciò gl'integrali sieno compiti, devesi ad essi sempre aggiungere, o da essi sottrarre una quantità costante a piacere, la quale ne' casi particolari si determina poi, come si vedrà a suo luogo.

Quindi l'integrale compito, per esempio, di dx farà $x \pm a$, (intendendo per a una costante qualunque) di $xx dx$ farà $\frac{x^3 \pm a^3}{3}$, e così degl'altri. La ragione di ciò è, che non

avendo le quantità costanti differenziale, la dx tanto può essere la differenziale di x , quanto di $x + a$, quanto di $x - b$ ec., e però tanto x , quanto $x + a$, quanto $x - b$ ec. possono essere gl'integrali di dx ; lo stesso vale di qualunque altra formola.

5. La stessa regola d'integrare serve per le formole differenziali complesse, cioè composte di molti termini, purchè, se hanno denominatore, sia egli o tutto costante, o se contiene la variabile, sia incompleso, cioè d'un solo termine, o riducibile ad esser tale.

Imperocchè in quelli casi la formola differenziale complessa si risolve in altrettante incomplete, quanti sono i termini della complessa, e però ciascheduna è soggetta alla mentovata regola. Sia la formola $\frac{bx^m dx + aax^{m-1} dx}{aa - bb}$; questa equivale alle due

$$\frac{bx^m dx}{aa - bb} + \frac{aax^{m-1} dx}{aa - bb}, \text{ e però gl'integrali di queste}$$

due formole faranno l'integrale della prima, cioè

$$\frac{bx^{m+1}}{m+1 \times aa - bb} + \frac{aax^m}{m \times aa - bb} \pm f.$$

Sia $\frac{bx^3 dx - a^4 dx}{aax - cxx}$; questa equivale alle due

$$\frac{bx^3 dx}{a - c \times ax} - \frac{a^4 dx}{a - c \times ax}, \text{ cioè } \frac{bx dx}{a - c} - \frac{a^4 x^{-1} dx}{a - c}, \text{ e}$$

però l'integrale sarà $\frac{bx^2}{2 \times a - c} - \frac{a^4 x^{-1}}{-1 \times a - c} \pm f$, cioè

$$\frac{bx^2}{2a - c} + \frac{a^4}{a - c \times x} \pm f.$$

Sia $\frac{bx^m dx - aax^{m-1} dx}{xx}$; questa equivale alle due

$$bx^{m-2} dx - aax^{m-1} dx, \text{ e però l'integrale sarà } \frac{bx^{m-1}}{m-1} - \frac{aax^{m-2}}{m-2} \pm f.$$

6. Se in oltre la formola differenziale complessa sarà elevata a qualche potestà, il di cui esponente sia positivo, ed intero, ridotta essa attualmente alla data potestà, ciascun termine s'integrerà colla stessa regola.

7. Tutto ciò, che fin'ora è detto, procede quando nella formola differenziale nessun termine vi sia, in cui l'esponente della variabile sia l'unità negativa, come $\frac{adx}{x}$, o sia $ax^{-1}dx$, imperocchè secondo la regola

la l'integrale farebbe $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, o sia $\frac{ax^0}{0}$, cioè infinito; il che nulla ci fa sapere.

8. In questi casi adunque bisogna ricorrere ad altri metodi. Due sono quelli, che servono: uno per mezzo d'una curva, che si chiama *Logaritmica*, ed anco *Logistica*, l'altro per mezzo di serie infinite. Delle serie infinite, delle quali in moltissimi altri casi si può fare uso, come si vedrà, ne parlerò nel secondo Capo.

9. Per ora, quanto alla *Logaritmica*, ella è una curva di tale proprietà, che prese nell'asse le assisse in proporzione aritmetica, le corrispondenti ordinate sono in proporzione geometrica. E però l'asse *AD* (Fig. 1.) si divida in parti eguali *AB, BC, CD* ec.; su i punti *A, B, C, D* ec. si eriggano le perpendicolari *AE, BF, CG, DH* ec. tali, che sieno tra di loro in geometrica proporzione; i punti *E, F, G, H* ec. saranno nella

nella curva, e di nuovo dividendo in parti eguali le AB, BC cc., e sopra le divisioni alzando le perpendicolari nella stessa geometrica proporzione, si averanno altri punti intermedi, e finalmente moltiplicando in infinito le divisioni, avremo infiniti punti, cioè la curva stessa.

Diviso adunque l'asse in parti infinitissime, ed eguali, sia una di queste $CM=dx$, l'ordinata $CG=y$, e ad essa infinitamente prossima MO , farà adunque $NO=dy$. Sia un'altra ordinata $DH=z$, ed altre, quante si vuole, corrispondenti ad asse aritmeticamente proporzionali. Averanno adunque esse ordinate tra loro la medesima proporzione; ma per conseguenza saranno pure nella stessa proporzione le loro differenziali, adunque farà $dy, dz :: y, z$, o sia $dy, y :: dz, z$; onde farà costante la ragione di dy alla y , e però assumendosi costante la dx , farà $dy, y :: dx, a$, cioè $\frac{ady}{y} = dx$, equazione della curva.

E' facile il vedere, che la sottangente di questa curva farà sempre costante, imperocchè nella formola generale della sottangente ($\frac{ydx}{dy}$) sostituito in luogo di y il valore dato dall'equazione della curva, avrassi $\frac{ydx}{dy} = \frac{adydx}{dx dy} = a$. Ma comechè la progressione geometrica crescente delle ordinate si può produrre in infiniti

to, crescendo pure in infinito aritmeticamente le assisse, anderà in infinito la curva, e sempre allontanandosi dall'asse. E perchè la stessa progressione si può produrre ancora in infinito, ma decrescente, crescendo sempre le assisse, anderà da quest'altra parte in infinito la curva, ma sempre accostandosi all'asse senza toccarlo mai, e però sarà egli asintoto di essa curva.

10. In quest'altra maniera ancora, fra le molte, si può intendere descritta la Logaritmica.

Sia la retta indefinita MH (Fig. 2.) divisa in parti eguali MN , NB , BK ec., e presa NI a piacere, sul punto I si alzi la normale IO di quella grandezza, che si vuole, indi si conduca NO , e sul punto A si alzi la normale AC fin che incontri NO prodotta in C ; dal punto B si tiri BC , e sul punto E si alzi la normale ED , che incontri BC prodotta in D ; dal punto K si tiri KD , e sul punto F si alzi la normale FP , che incontri KD prodotta nel punto P ; e nello stesso modo si continovi in infinito l'operazione, ed i punti O , C , D , P ec. saranno nella curva logaritmica. Per avere i punti intermedj fra O , C , D , P ec. si dividano per metà le porzioni MN , NB , e ripetuta la stessa operazione, si avranno altri punti, e finalmente col moltiplicare in infinito le divisioni eguali nella retta MH , cioè col supporre infinitesime, ed eguali le porzioni MN , NB ec. avremo infiniti punti, i quali ci segneranno la
curva

curva logaritmica, la di cui sottangente, come apparisce dalla costruzione, sarà sempre costante. Chiamata adunque $NI=a$, e poste $\pm dx$ le infinitesime costanti porzioni dell'asse, sia l'ordinata $GR=y$, $GH=dx$, $TS=dy$; per la similitudine de' triangoli STR , RGA , sarà $dy, dx::y, a$, cioè $\frac{ady}{y}=dx$, equazione della curva.

Da questa costruzione si deduce pure quello, che la prima suppone, vale a dire la primaria proprietà della logaritmica, che sieno in geometrica proporzione le ordinate, che corrispondono alle assisse in proporzione aritmetica. Imperocchè, supposte infinitesime le eguali porzioni dell'asse, l'archetto OC sarà la tangente NO prodotta, l'archetto CD sarà la tangente BC prodotta, l'archetto PD la tangente KD prodotta, e così di tutti gl'altri; saranno adunque simili i triangoli OIN , CAN , e però sarà $OI, CA::NI, NA$; così pure per la similitudine de' triangoli CAB , DEB sarà $CA, DE::BA, BE$; ma $NI=BA$, $NA=BE$, adunque sarà $OI, CA::CA, DE$, e così successivamente; e però le ordinate saranno in continua proporzione geometrica. Quindi anche considerando l'asse non diviso in parti infinitesime, ma finite, ed eguali, perchè le intermedie ordinate proporzionali fra IO , per esempio, e CA sono nè più, nè meno di numero delle intermedie fra CA , e DE , e così dell'altre; saranno pure le IO ,

CA ,

CA, DE in proporzione geometrica corrispondenti ad affisse in proporzione aritmetica. Anzi prese due ordinate a piacere, e prese due altre, dovunque si vuole, purchè la distanza fra la prima, e la seconda sia la stessa della distanza fra la terza, e la quarta, come sarebbero IO, CA, RG, SH ; sarà la prima alla seconda, come la terza alla quarta.

La curva logaritmica non si può geometricamente descrivere, bensì organicamente, e però è una curva meccanica, e l'impossibilità di essere geometricamente descritta è la stessa dell'impossibilità della quadratura dello spazio iperbolico, come si vedrà a suo luogo; quindi gl'integrali di quelle formole differenziali, che portano alla logaritmica, si dicono ancora dipendere dalla quadratura dell'iperbola.

Nella logaritmica adunque le porzioni dell'asse, o sia le affisse prese da un punto fisso corrispondono alle ordinate in quella guisa appunto, che nelle tavole trigonometriche corrispondono i logaritmi alla serie naturale de' numeri.

11. Ciò posto sia (*Fig. 3.*) la logaritmica DC , la di cui sottotangente eguale all'unità, o pure, se si vuole, eguale alla costante a ; e sia l'ordinata AD eguale alla sottotangente, cioè eguale all'unità, o sia alla costante a , che fa figura d'unità. Presa una qualunque affissa $AB=x$, sia $BC=y$, ma l'equazione della
b curva

curva è $\frac{ady}{y} = dx$, adunque l'integrale di $\frac{ady}{y}$ farà x ,
 ma $x = AB$, ed AB è il logaritmo di BC , cioè di y ,
 adunque servendosi del segno $\int$ per significare integra-
 le o somma, che vuol dire lo stesso, e del segno l ,
 che vuol dire logaritmo, farà $\int \frac{ady}{y} = ly$ nella logaritmi-
 ca, la di cui sottangente sia $= a$. Istessamente farà
 $\int \frac{dy}{y} = ly$ nella logaritmica della sottangente $= 1$;
 $\int \frac{b dy}{y} = ly$ nella logaritmica della sottangente $= b$;
 $\int \frac{ady}{b+y} = l(b+y)$ nella logaritmica della sottangente $= a$,
 cioè presa nella logaritmica la ordinata $BQ = AH = y$,
 se ad essa si aggiungerà $HK = b$, e si condurrà KG
 parallela all'asintoto, e si abbasserà GE parallela ad
 AD , farà $GE = y + b$, e però $AE = l(b+y)$.

12. Dalla natura della logaritmica chiaramente si
 vede, che qualunque volta la quantità, di cui si vuole
 il logaritmo, è quantità infinita, facendo essa figura di
 ordinata infinita nella logaritmica, sarà pure infinita
 l'intercetta nell'asse fra essa, ed il punto A , e però in-
 finito il logaritmo; e se essa sarà eguale alla prima AD ,
 cioè alla sottangente, il logaritmo sarà eguale al zero;

e se sarà minore di AD , come sarebbe ΩA , il logaritmo sarà ΩA , e negativo; e finalmente se sarà $= 0$, il logaritmo sarà infinito. Se la formula differenziale fosse $-\frac{dy}{y}$, l'integrale sarebbe $-ly$, e se fosse $-\frac{dy}{a+y}$, l'integrale sarebbe $-l(a+y)$, ma se sarà $-\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $l(a-y)$, e se sarà $\frac{dy}{a-y}$, l'integrale sarà $-l(a-y)$,

intendendo questi logaritmi nella logaritmica della sottangente eguale all'unità. La ragione di ciò si è, che siccome l'integrale di $\frac{dy}{y}$ è ly , così il differenziale di

ly è $\frac{dy}{y}$, e generalmente parlando, il differenziale di

una quantità logaritmica è la frazione, il di cui numeratore sia il prodotto della sottangente nel differenziale della quantità, ed il denominatore la quantità stessa, adunque il differenziale di $-l(a+y)$ sarà $-\frac{dy}{a+y}$; il differenziale di $l(a-y)$ sarà $\frac{dy}{a-y}$; il differenziale di $-l(a-y)$ sarà $-\frac{dy}{a-y}$;

supposta la sottangente della logaritmica $= 1$, e quando non sia tale, si moltiplicheranno i numeratori dei differenziali nella data sottangente.

13. Ma poichè la logaritmica non è ordinate negative,

b 2

tive,

tive, pare, che non si saprebbe ritrovare la quantità, che corrisponda all'espressione $\sqrt{a-y}$, cioè quale sia il logaritmo di $a-y$, qualora $a-y$ sia quantità negativa, cioè y maggiore di a ; ma in questo caso avvertasi, che è la stessa cosa $\sqrt{a-y}$, e $\sqrt{y-a}$, e che in tale supposto essendo $y-a$ positiva essa può essere ordinata nella logaritmica, ed in fatti differenziando il primo logaritmo si à $\frac{-dy}{a-y}$, differenziando il secondo si à $\frac{dy}{y-a}$, e mutando i segni al numeratore, e denominatore, si à $\frac{-dy}{a-y}$, che è lo stesso del primo.

14. Dalla proprietà della logaritmica altre se ne deducono intorno alle quantità logaritmiche, ed in primo luogo, che il multiplo, o submultiplo di un logaritmo farà il logaritmo della quantità elevata alla potestà del dato numero, così $2/x = \log xx$; $3/x = \log x^3$; $\frac{1}{2}/x = \log \sqrt{x}$; $\frac{1}{3}/x = \log \sqrt[3]{x}$; $n/x = \log x^n$; $\frac{1}{n}/x = \log x^{\frac{1}{n}}$, e la ragione si è, perchè, presa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP=y$, il di cui logaritmo è AO (Fig. 3.), se si faranno AO, OS, SV ec. eguali tra loro, faranno AO, AS, AV aritmeticamente proporzionali, e le ordinate AD, OP, ST, VI ec. faranno geometricamente proporzionali, onde posta AD eguale all'unità, $OP=y$, sarà $ST=yy$, $VI=y^3$ ec., ma AS doppia di AO è logaritmo

garitmo di yy , cioè lyy , ed AP tripla di AO è ly^3 ; adunque $2ly = lyy$, $3ly = ly^3$. Così pure, posta $AO = ly$, e divisa per metà in M , sarà $MN = \sqrt{y}$, e però $AM = \frac{1}{2}AO$, cioè $\frac{1}{2}ly$, sarà $ly^{\frac{1}{2}}$. Itteffamente posta $QR = y$, e divisa AQ in tre parti eguali in M , ed O , sarà $MN = \sqrt[3]{y}$, cioè $y^{\frac{1}{3}}$, ma $AM = \frac{1}{3}ly$, adunque $\frac{1}{3}ly = ly^{\frac{1}{3}}$, e così degl'altri.

Nè devesi omettere di avvertire, che l'integrale di $\frac{-dy}{y}$ non è solo $-ly$, come si è veduto al num.

12., ma che può esprimersi anco per $l\frac{1}{y}$, o sia ly^{-1} ; conciosiacchè presa nella logaritmica una qualunque ordinata $OP = y$, e fatta $A\Omega = AO$, sarà per la natura della curva OP , $AD :: AD, \Omega A$, cioè $y, 1 :: 1, \Omega A = \frac{1}{y}$; ma $A\Omega$ è il logaritmo negativo di OP , cioè

di y , ed è assieme il logaritmo di ΩA , dunque sarà $-ly = l\frac{1}{y} = ly^{-1}$, vale a dire, che il logaritmo negativo di una qualunque quantità sarà lo stesso del logaritmo positivo della frazione, di cui essa quantità formi il denominatore, o sia della quantità stessa con l'esponente negativo; così sarà $-mly = l\frac{1}{y^m} = ly^{-m}$.

15. In oltre la somma di due, di tre ec. logaritmi sarà

farà eguale al logaritmo del prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi, e la differenza di due, di tre ec. logaritmi farà eguale al logaritmo della frazione, il di cui numeratore sia il prodotto delle quantità, delle quali essi sono i logaritmi positivi, ed il denominatore sia il prodotto delle quantità, delle quali sono i logaritmi negativi. Imperocchè sia $OP=y$, $QR=z$, sarà $AO=ly$, $AQ=lz$; si prenda $QB=AO$, sarà $AB=ly+lz$; ma AB è pure il logaritmo di BC , e per la proprietà della logaritmica, BC è la quarta proporzionale di AD , OP , QR , cioè $=yz$, adunque sarà $AB=ly+lz=lyz$. Sia un'altra ordinata $MN=p$, si prenda $BV=AM$, sarà $AV=AM+AB=l p+lyz$; ma AV è il logaritmo di VI , ed $VI=pyz$, adunque $l p+ly+lz=lp yz$.

Sia di nuovo $QR=z$, $OP=y$, e si prenda $QM=AO$, sarà $AM=AQ-AO=lz-ly$; ma AM è il logaritmo di MN , e per la stessa proprietà della logaritmica, $MN=\frac{z}{y}$, adunque $AM=lz-ly=l\frac{z}{y}$. Sia un'altra ordinata $BC=p$, e si prenda $\Sigma A=BM$, sarà $\Sigma A=-AB+AM=-lp+l\frac{z}{y}$; ma ΣA è il logaritmo di $\Sigma \Pi$, ed $\Sigma \Pi=\frac{z}{py}$ (per essere la quarta pro-

por-

porzionale di BC, MN, AD), adunque $lz - ly - lp = \int \frac{z}{y}$ ec.

16. Siccome negl'altri casi, così ancora in questi delle integrazioni per via di logaritmi, si deve sempre aggiungere la costante, cioè il logaritmo di quantità costante arbitraria, da determinarsi poi ne' casi particolari.

17. Ma quando le formole differenziali proposte da integrarsi sieno frazioni col denominatore complesso, si possono dare alcuni casi, ne' quali è facile avere il loro integrale col mezzo della logaritmica, e farà ogni qual volta il numeratore della frazione sia il differenziale preciso del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo di esso differenziale, anzi ogni qual volta gli sia proporzionale, ed in questi casi l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o pure il multiplo, o submultiplo, o proporzionale di esso logaritmo.

Così l'integrale di $\frac{2xdx}{aa+xx}$ farà $\int \frac{2xdx}{aa+xx}$; l'integrale di $-\frac{2xdx}{aa-xx}$ farà $\int \frac{2xdx}{aa-xx}$; l'integrale di $\frac{3xxdx}{a^3+x^3}$ farà $\int \frac{3xxdx}{a^3+x^3}$; l'integrale di $\frac{4xdx}{aa+xx}$ farà $2 \int \frac{4xdx}{aa+xx}$, cioè $\int \frac{4xdx}{aa+xx}$; l'integrale di $\frac{xdx}{aa+xx}$ farà $\frac{1}{2} \int \frac{xdx}{aa+xx}$, cioè

cioè $\sqrt[n]{aa+xx}$; l'integrale di $\frac{xxdx}{a'+x'}$ sarà $\frac{1}{3}\sqrt[n]{a'+x'}$,
cioè $\int \sqrt[n]{a'+x'}$; e generalmente l'integrale di
 $\frac{mx^{n-1}dx}{a^n \pm x^n}$ sarà $\pm \frac{m}{n} \sqrt[n]{a^n \pm x^n}$, cioè $\pm m \sqrt[n]{a^n \pm x^n}^{\frac{1}{n}}$,
o sia $\pm \sqrt[n]{a^n \pm x^n}^{\frac{m}{n}}$. Così l'integrale di $\frac{adx - xdx}{ax - xx}$
sarà $\sqrt[n]{ax - xx}$; l'integrale di $\frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{ax - xx}$ sarà
 $\int \sqrt[n]{ax - xx}$, e così degl' altri a piacere, presi questi
logaritmi nella logaritmica della sottangente = 1.

18. Ma se il numeratore della frazione non è della forma, che abbiamo considerata, quando però il denominatore sia tale, che nessuno de' suoi componenti lineari sia immaginario, cioè quando tutte le radici, dal prodotto delle quali egli è nato, sieno reali, allora si proceda nella seguente maniera.

19. Ed in primo luogo le radici del denominatore, o saranno tutte eguali tra loro, o no; se sono tutte eguali, come le avrebbe la formola $\frac{x^m dx}{x \pm a^n}$, si ponga $x \pm a = z$, e però $dx = dz$, $x^m = z^m \mp a$, $x \pm a = z^n$;

e

e sostituendo nella formola questi valori, sarà $\frac{\overline{z \mp a}^m dz}{z^n}$.

Fatta pertanto attualmente la potestà m , ciascun termine si saprà integrare, o algebricamente, o trascendentemente per mezzo della logaritmica; quindi restituito in luogo di z il valore dato per x , avremo l'integrale della proposta formola $\frac{x^m dx}{x \pm a}^n$.

Sia per esempio $\frac{x^1 dx}{x-a}$. Pongo $x-a=z$, e però

$dx=dz$, $x^1=z^1+3azz+3aaz+a^1$, $\overline{x-a}^1=z^1$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{z^1 dz + 3azzdz + 3aazdz + a^1 dz}{z^1}$,

ed integrando, $z + 3/z - \frac{3aa}{x} - \frac{a^1}{z}$, e restituendo in

luogo di z il valore dato per x , avremo finalmente

$\int \frac{x^1 dx}{x-a} = x-a + \overline{x-a}^1 - \frac{3aa}{x-a} - \frac{a^1}{2 \times \overline{x-a}^2}$, il qual in-

tegrale differenziato restituirà la formola proposta da integrarsi.

20. Che se le radici del denominatore non saranno tutte eguali, ma o tutte disuguali, o miste d'uguali, e d'inequali, allora conviene prima preparare la formola col rendere positivo il termine della massima
c potestà

potestà della variabile nel denominatore, se fosse negativa, indi liberarlo da' coefficienti, se ne à, di poi se la variabile nel numeratore, quando vi sia, fosse elevata a potestà maggiore, o eguale alla massima, che à nel denominatore, debbesi dividere il numeratore per lo denominatore fin' a tanto, che l'esponente della variabile in quello sia minore, che in questo; in fine si trovino algebricamente le radici del denominatore. Sia per cagion d'esempio la formola $\frac{aadx}{ax - 4xx}$. Mutan-

do i segni, e dividendo per 4, farà $\frac{\frac{1}{4}aadx}{xx - \frac{1}{4}aa}$, cioè

$\frac{\frac{1}{4}aadx}{x - \frac{1}{2}a \times x + \frac{1}{2}a}$: Sia $\frac{aadx}{2xx + 4ax + 2bx + 2ab}$, dividendo per 2, farà $\frac{\frac{1}{2}aadx}{xx + 2ax + bx + 2ab}$, cioè $\frac{\frac{1}{2}aadx}{x + 2a \times x + b}$.

Se nel numeratore vi fosse stata la variabile, ed elevata a maggiore potestà, che nel denominatore, si avrebbe fatta l'attual divisione, per cui avremmo avuti degli interi, e de' rotti: gl'interi si tratterebbero nelle maniere fin' ora spiegate; i rotti nella seguente.

21. Sia la frazione $\frac{\frac{1}{2}aadx}{x + 2a \times x + b}$, dico: che

questa sarà eguale a due frazioni, il numeratore delle quali

quali sia lo stesso di questa, ed i denominatori sieno: della prima il prodotto d'una delle radici nella differenza della quantità costante dell'altra radice, e della quantità costante della radice posta; della seconda sia il prodotto dell'altra radice nella differenza della costante della prima radice, e della costante di questa.

$$\text{seconda, cioè } \frac{\frac{1}{2} a a d x}{x+1a \times x+b} = \frac{\frac{1}{2} a a d x}{x+1a \times b-1a} + \frac{\frac{1}{2} a a d x}{x+b \times 1a-b},$$

e se le radici fossero tre, quattro ec. si proceda sempre collo stesso metodo; ed in fatti riducendo al comune denominatore le frazioni in tal guisa ritrovate, restituiranno esse la frazione prima onde sono nate.

Gli integrali adunque di tali frazioni così spezzate, i quali faranno sempre in nostra mano, supposta la logaritmica, faranno gli integrali della proposta formola; e però farà

$$\int \frac{\frac{1}{2} a a d x}{x+1a \times x+b} = \frac{\frac{1}{2} a}{2a-b} \int \frac{1}{x+b} - \frac{\frac{1}{2} a}{2a-b} \int \frac{1}{x+1a}, \text{ cioè } \\ \frac{\frac{1}{2} a}{2a-b} \int \frac{x+b}{x+1a}, \text{ o sia } \frac{a}{2a-b} \int \frac{\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+1a}} \text{ nella logaritmica}$$

della sottangente = a .

$$\text{Sia } \frac{\frac{1}{4} a a d x}{x+\frac{1}{2} a \times x-\frac{1}{2} a} : \text{ essa si spezzerà nelle}$$

c 2

due

due $\frac{\frac{1}{4} a dx}{x + \frac{1}{2} a \times -\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} a} + \frac{\frac{1}{4} a dx}{x - \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a}$,

cioè $\frac{\frac{1}{4} a dx}{x - \frac{1}{2} a} - \frac{\frac{1}{4} a dx}{x + \frac{1}{2} a}$, e però farà

$$\int \frac{\frac{1}{4} a dx}{x + \frac{1}{2} a \times x - \frac{1}{2} a} = \frac{1}{4} \int \frac{x - \frac{1}{2} a}{x + \frac{1}{2} a}; \text{ o sia } =$$

$$\int \frac{\sqrt{x - \frac{1}{2} a}}{\sqrt{x + \frac{1}{2} a}}, \text{ nella logaritmica della sottangente } = a.$$

Sia $\frac{a^3 dx}{x+a \times x-b \times x+c}$, essa si spezzerà nelle tre

$$\frac{a^3 dx}{x+a \times -b-a \times c-a} + \frac{a^3 dx}{x-b \times a+b \times c+b} + \frac{a^3 dx}{x+c \times a-c \times -b-c}$$

e però farà $\int \frac{a^3 dx}{x+a \times x-b \times x+c} = \frac{aa}{a+b \times a-c} \int \frac{x+a+}{x-b} - \frac{aa}{a-c \times b+c} \int \frac{x+c}{x+c}$ nella logarit-

mica della sottangente $= a$.

Sia $\frac{-a^3 dx}{x^3 - aax}$, cioè $\frac{-a^3 dx}{x+a \times x-a \times x+0}$; essa

fi

fi spezzerà nelle tre

$$\frac{-a'dx}{x+a \times -1a \times 0 - a} \quad \frac{-a'dx}{x-a \times 1a \times 0 + a} \quad \frac{-a'dx}{x+0 \times a - 0 \times -a - a},$$

cioè $-\frac{adx}{2 \times x+a} - \frac{adx}{2 \times x-a} + \frac{adx}{x}$; e però farà

$$\int \frac{-a'dx}{x^2 - aa} = \int x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{xx - aa}, \text{ cioè } = \int \frac{x}{\sqrt{xx - aa}}$$

nella logaritmica della sottangente $= a$.

22. Se il denominatore della formola farà misto di radici eguali, ed ineguali, come per efempio

$$\frac{a'dx}{x-b \times x+c}, \text{ allora si confideri la formola, come}$$

fe fosse $\frac{a'dx}{x-b \times x+c}$, e spezzata questa al solito, farà

$$\frac{a'dx}{x-b \times x+c} = \frac{a'dx}{x-b \times c+b} + \frac{a'dx}{x+c \times -b-a}, \text{ adunque}$$

moltiplicando i denominatori per $x-b$, altra radice della proposta formola, farà anco

$$\frac{a'dx}{x-b \times x+c} = \frac{a'dx}{x-b \times c+b} + \frac{a'dx}{x+c \times x-b \times -b-a},$$

ma il primo termine dell'omogeneo di comparazione à il denominatore di radici tutte eguali, ed il secondo di radici tutte disuguali; adunque l'uno, e l'altro maneggiato, come si è detto, potremo avere l'integrale di

$$\frac{a'dx}{x-b \times x+c}, \text{ il quale farà in parte algebrico, ed in}$$

in parte logaritmico, cioè $\frac{aa}{b+c} \sqrt{\frac{x+c}{x-b}} \frac{-a^2}{x-b \times b+c}$,

preso il logaritmo nella logaritmica della tangente = a .

Se le radici eguali faranno in maggior numero, si dovrà nello stesso modo ripetere l'operazione fin che sia necessario.

23. Rimane ora da considerarsi il caso, in cui le frazioni abbiano in oltre nel numeratore la variabile a qualunque potestà, intendendo però sempre, come è stato avvertito di sopra, che la potestà di essa variabile nel numeratore sia minore della massima, che è nel denominatore, e non lo essendo, si riduca tale con l'attual divisione.

In questi casi si tratti la formola nello stesso modo, come se nel numeratore non vi fosse potestà alcuna della variabile, spezzandola nel modo spiegato in altrettante, quante sono le radici del denominatore, indi, se l'esponente della variabile nel numeratore della data formola è di numero dispari, si mutino i segni a' numeratori delle ritrovate frazioni, e se è di numero pari, si lascino ai numeratori quei segni che hanno; di poi ciascun numeratore si moltiplichi per tanta potestà della costante di quella radice, che è nel denominatore, quanta è la potestà della variabile nel numeratore della proposta formola, prefiggendo ad essa costante

stante elevata a tale potestà quel segno, che porta il segno naturale, che à nel denominatore.

Sia $\frac{bbxdx}{x+a \times x-a}$. Considerata questa, come se nel

numeratore la variabile non vi fosse, si spezzerà nelle due $\frac{bbdx}{x+a \times -1a} + \frac{bbdx}{x-a \times 1a}$; ma perchè nel nume-

ratore vi è la variabile elevata alla potestà dell'unità, si mutino i segni a' numeratori, e si moltiplichino relativamente per la costante di quella radice, che è nel suo denominatore, cioè la prima per a , la seconda per $-a$, ed avremo

$$\frac{bbxdx}{x+a \times x-a} = \frac{-bbdx \times a}{x+a \times -1a} - \frac{bbdx \times -a}{x-a \times 1a},$$

cioè $= \frac{bbdx}{2 \times x+a} + \frac{bbdx}{2 \times x-a}$, e però sarà

$$\int \frac{bbxdx}{x+a \times x-a} = b \int \sqrt{x+a} + b \int \sqrt{x-a}, \text{ o fia.}$$

$= b \int \sqrt{xx-aa}$, nella logaritmica della sottangente $= b$; o pure, se si vuole, farà $= bb \int \sqrt{xx-aa}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$.

Ma era superfluo il ridurre questa formola alle due frazioni, poichè essendo essa $\frac{bbxdx}{xx-aa}$, il numeratore è

appunto la metà del differenziale del denominatore, e però

però senz'altra operazione l'integrale sarà ; come al num. 17. si è detto , $bb \int \sqrt{xx - aa}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$.

Sia $\frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b}$, cioè $\frac{x^2 dx}{x^2 + bxx - aax - aab}$, e diviso il numeratore per lo denominatore , avremo $xx - bx^2 dx + aaxxx dx + aabxx dx$, e diviso di nuovo

il termine $-bx^2 dx$ per lo denominatore , avremo $\frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = xx - bdx + \frac{aaxxx dx + bbbxx dx - aabbdx}{xx - aa \times x + b}$.

Ma i due primi termini sono interi , e l'ultimo non è la variabile nel numeratore , e però si fa maneggiare ; adunque rimane da ridursi solamente l'altro termine , cioè $\frac{aa + bb \times xxx dx}{xx - aa \times x + b}$.

Considerato questo , come se non avesse la variabile nel numeratore , sarebbe $\frac{aa + bb \times dx}{xx - aa \times x + b} =$

$\frac{aa + bb \times dx}{x + b \times -aa + bb} + \frac{aa + bb \times dx}{x + a \times -aab + aab} + \frac{aa + bb \times dx}{x - a \times aab + aab}$, e per tanto sarà $\frac{aa + bb \times xxx dx}{x + b \times xx - aa} = \frac{aa + bb \times bbdx}{x + b \times -aa + bb} +$

$\frac{aa + bb \times aadx}{x + a \times -aab + aab} + \frac{aa + bb \times aadx}{x - a \times aab + aab}$, onde finalmen-
te

$$\text{te poi } \frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = x dx - b dx + \frac{-aabb dx}{x + b \times xx - aa}$$

$$\frac{aa + bb \times b dx}{x + b \times -aa + bb} + \frac{aa + bb \times a dx}{x + a \times -aab + aab} + \frac{aa + bb \times a dx}{x - a \times aab + aab}$$

$$\text{e se vogliamo spezzare anche il termine } \frac{-aabb dx}{x + b \times xx - aa},$$

per avere in fine l'integrale della proposta formola,

$$\text{farà } \frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = x dx - b dx + \frac{b^2 dx}{x + b \times -aa + bb}$$

$$\frac{a^2 dx}{x + a \times aab - aab} + \frac{a^2 dx}{x - a \times aab + aab}. \text{ Adunque in-}$$

$$\text{tegrando avremo } \int \frac{x^2 dx}{xx - aa \times x + b} = \frac{xx}{2} - bx -$$

$$\frac{b^2}{aa - bb} \int \frac{1}{x + b} + \frac{a^2}{aab - aab} \int \frac{1}{x + a} + \frac{a^2}{aab + aab} \int \frac{1}{x - a},$$

prefi tali logaritmi nella logaritmica della sottangente = 1.

• Così in queste, come in tutte l'altre integrazioni, che si faranno, s'intenda doverli aggiungere la costante, qualora farà da me per brevità ommessa, il che basterà d'avere qui avvertito.

24. Ma le formole differenziali possono avere, e spesso hanno denominatori tali, de' quali non si possono ritrovare algebricamente le radici, ciò non ostante, però serve egualmente bene la regola delle frazioni an-

d

che

che in questi casi; imperciocchè si tratti il denominatore, come se fosse un' equazione, e col mezzo delle intersecazioni delle curve si trovino geometricamente in linee i valori della variabile in quella guisa appunto, che si costruiscono i problemi solidi, e tali valori o linee si chiamino A, B, C , ec. coi segni positivi, o negativi secondo, che sono quantità positive, o negative; ciascuno di questi sottratto dalla variabile formerà le radici del denominatore di modo, che la proposta formola differenziale si convertirà in una di questa forma $\frac{x^n dx}{x - A \times x + B \times x - C \text{ ec.}}$, e sopra di questa nello

stesso modo si operi, come si è operato nel caso delle radici algebriche.

25. E' facile a vedersi, che l'addotta regola serve solamente nel caso, che le radici del denominatore sieno tutte reali, perchè altrimenti essendo, spezzata la formola in altre frazioni, tante di queste sarebbero immaginarie, ed in conseguenza immaginarj gl'integrali, quante sono le radici immaginarie nel denominatore della proposta formola differenziale,

26. Quando adunque il denominatore delle proposte formole differenziali sia composto di radici immaginarie o in tutto, o in parte, fa d'uopo ricorrere ad altre maniere; ed in primo luogo abbiano le date for-

mele

mole il denominatore di due sole dimensioni, cioè di due radici immaginarie, e sia per esempio $\frac{bbdx}{xx+aa}$.

L'integrale di questa formola, e di tutte l'altre simili dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo: di cui rettificazione, o quadratura, poichè data l'una, è vicendevolmente data l'altra.

Sia pertanto (Fig. 4.) il quadrante di circolo ACG , il raggio $AC=a$, CD tangente $=x$, farà $AB=\frac{aa}{\sqrt{aa+xx}}$,

$$CB = a \frac{-aa}{\sqrt{aa+xx}}, \text{ ed } EB = \frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}.$$

Condotta AK infinitamente prossima ad AD , farà EO la flussione, o differenza dell'arco CE ; e tirata dal punto O la retta OM parallela ad EB , ed EH parallela ad AC , farà HE la differenziale di CB , HO la differenziale di EB , e però $EH = \frac{aaxdx}{aa+xx^{\frac{3}{2}}}$, ed

$$HO = \frac{a^2 dx}{aa+xx^{\frac{3}{2}}}; \text{ adunque l'archetto } EO = \sqrt{HE^2 + HO^2}$$

$$\text{farà} = \sqrt{\frac{a^4 dx^2 + a^4 x x dx^2}{aa+xx}} = \frac{aaxdx}{aa+xx}; \text{ adunque l'integra-}$$

le della formola $\frac{aaxdx}{aa+xx}$ farà l'arco CE della tangente

$CD=x$, e del raggio $CA=a$.

d 2

Ripi-

Ripiglio ora la formola $\frac{b b d x}{a a + x x}$: moltiplicando il numeratore, e denominatore per $a a$, sarà essa $\frac{b b}{a a} \times \frac{a a d x}{a a + x x}$; ma l'integrale di $\frac{a a d x}{a a + x x}$ è l'arco di circolo, che abbia per tangente la x , ed il raggio $= a$, farà adunque $\int \frac{b b d x}{a a + x x} =$ al quarto proporzionale di $a a$, di $b b$, e dell'arco di circolo col raggio $= a$, tangente $= x$.

Sia la formola $\frac{a a m d x}{x x x + n a b}$: come che moltiplicando il numeratore, e denominatore per b , equivale a quest'altra $\frac{a m}{n b} \times \frac{a b d x}{x x + a b}$, farà $\int \frac{a a m d x}{x x x + n a b} =$ al quarto proporzionale di $n b$, di $a m$, e dell'arco di circolo col raggio $= \sqrt{a b}$, e tangente $= x$; e lo stesso si dica di tutte l'altre simili.

27. Per l'opposto farà adunque il differenziale di un'arco qualunque di circolo il prodotto del quadrato del raggio nella differenza della tangente diviso per la somma del quadrato dello stesso raggio, e del quadrato della tangente.

E come agl'altri integrali, o sommatorie devesi aggiungere sempre la costante, così a questi ancora di rettificazioni di circolo, per avere le sommatorie compiute, devesi aggiungere un'arco costante dello stesso circolo,

circolo, imperciocchè la differenza per cui può crescere, o calare l'arco così composto del fluente; e del costante, non sarà mai altro che il differenziale dell'arco fluente; adunque ad esso differenziale può competere per integrale la somma dell'arco fluente con qualunque arco costante del medesimo circolo. Supponiamo, che sia x la tangente d'un'arco del raggio $=a$, e sia b la tangente di un'altro arco costante del medesimo circolo; si fa, che la tangente della somma di questi due archi (num. 108. Lib. I.) sarà $=\frac{aab+axx}{aa-bx}$,

ma il differenziale di questa moltiplicato nel quadrato del raggio, ed il prodotto diviso per lo quadrato del raggio più il quadrato della stessa tangente si trova essere $\frac{aadx}{aa+xx}$, che è il differenziale dell'arco fluente; adunque ec.

Se fosse la formola $\frac{aadx}{aa+xx-2bx+bb}$, essendo

$xx-2bx+bb$ un quadrato, si faccia $x-b=z$, e sostituendo avremo $\frac{aadz}{aa+zz}$, e però $\int \frac{aadz}{aa+zz} =$ all' arco

di circolo del raggio $=a$, tangente $=z$, ma $z=x-b$; adunque $\int \frac{aadx}{aa+xx-2bx+bb} =$ all'arco di circolo del raggio

$=a$, tangente $=x-b$, qualora però sia x maggiore di b ; ma presa x minore di b , l'integrale sarà — arco di circolo col medesimo raggio, e tangente;

ed

ed in fatti differenziando , avremo $\frac{aadx}{aa+bb-2bx+xx}$,

la stessa formola di prima .

Sia proposta la formola $\frac{4abdx+3bxdx}{xx-4ax+6aa}$. Si faccia spa-

rire il secondo termine nel denominatore col porre $x=y+2a$. Fatte le sostituzioni , sarà

$\frac{4abdy+3bydy+6aby}{yy+2aa}$, cioè $\frac{10abdy}{yy+2aa} + \frac{3bydy}{yy+2aa}$.

L'integrale del primo termine sarà adunque il terzo proporzionale di a , di $5b$, e dell'arco di circolo col raggio $=\sqrt{2aa}$, tangente $=y$; del secondo sarà

$\int \frac{1}{yy+2aa}^{\frac{1}{2}}$ nella logaritmica della sottangente $=b$.
Adunque restituendo in luogo della y il suo valore $x-2a$, l'integrale della formola $\frac{4abdx+3bxdx}{xx-4ax+6aa}$ farà il

quarto proporzionale di a , $5b$, e dell'arco di circolo col raggio $=\sqrt{2aa}$, tangente $=x-2a$, con di più $\int \frac{1}{xx-4ax+6aa}^{\frac{1}{2}}$ nella logaritmica della sottangente $=b$.

28. Passando ora a quelle formole differenziali , che contengono segni radicali , cioè quantità elevate a potenza di esponente rotto , se la formola sarà , o si potrà

ridurre

ridurre ad esser tale, che l'incognita sotto il segno non ecceda la prima dimensione, e fuori del segno sia potestà positiva, allora faranno esse sempre algebricamente integrabili, e si avranno le integrazioni col servirsi d'una semplicissima sostituzione, cioè col porre la quantità sotto il segno eguale ad una nuova variabile.

Sia per tanto $adx \sqrt{ax - aa}$. Si ponga $\sqrt{ax - aa} = z$, e però $x = \frac{zz + aa}{a}$, $dx = \frac{zz dz}{a}$, e fatte le sostituzioni, avremo $zz dz$, ed integrando $\frac{zz}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x , farà $\frac{z}{3} \times \frac{1}{ax - aa}^{\frac{3}{2}}$ l'integrale della proposta formola.

Se la formola fosse stata $\frac{adx}{\sqrt{ax - aa}}$, procedendo

nello stesso modo averemmo per integrale $z \times \frac{1}{ax - aa}^{\frac{1}{2}}$. Sia $adx \sqrt{a - x}$; posta $\sqrt{a - x} = z$, e però $x = a - z^2$, $dx = -4z dz$, e fatte le sostituzioni, avrassi $-4xz^2 dz + 4z^3 dz$, ed integrando $-\frac{4xz^2}{5} + \frac{4z^3}{9}$, e restituendo in

luogo di z il valore dato per x , farà $-\frac{4}{5} \times \frac{1}{a - x^{\frac{5}{2}}} +$

$\frac{4}{9} \times \frac{1}{a - x^{\frac{9}{2}}}$.

Se

Se la formola fosse stata $\frac{xdx}{\sqrt[4]{a-x}}$, procedendo

nello stesso modo avrebbesi per integrale

$$-\frac{4a}{3} \times \frac{1}{a-x} + \frac{4}{7} \times \frac{z}{a-x}.$$

Sia $xxdx \sqrt{a+x}$; posta $\sqrt{a+x} = z$, e però $x = zz - a$, $dx = 2zdz$, $xx = zz - a$, e fatte le sostituzioni, avremo $zz - a \times 2zdz$, cioè $2z^3dz - 4azdz + 2aazzdz$, ed integrando, $\frac{2z^4}{4} - \frac{4az^2}{2} + \frac{2aaz^3}{3}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x , sarà finalmente $\frac{2}{4} \times \frac{z^4}{a+x} - \frac{4a}{2} \times \frac{z^2}{a+x} + \frac{2aa}{3} \times \frac{z^3}{a+x}$ l'integrale cercato.

Se la formola fosse $\frac{xxdx}{\sqrt{a+x}}$, farebbe l'integrale

$$\frac{2}{5} \times \frac{z^5}{a+x} - \frac{4a}{3} \times \frac{z^3}{a+x} + 2aa \times \frac{z^2}{a+x}.$$

Sia $xdx \sqrt[3]{a+x}$, cioè $xdx \times \frac{1}{a+x}^{\frac{1}{3}}$; posta al solito $\frac{1}{a+x}^{\frac{1}{3}} = z$, e però $x = z^3 - a$, $dx = 3z^2dz$,

e fatte

e fatte le sostituzioni, farà $z^{\frac{2}{3}} - a \times \frac{2z^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$, cioè
 $\frac{2z^{\frac{4}{3}}}{\frac{2}{3}} - \frac{2az^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$, ed integrando, $\frac{2z^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{2az^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}$,
 e restituendo in luogo di z il valore dato per x , farà
 $\frac{2}{7} \times \frac{z^{\frac{7}{3}}}{a+x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2a}{5} \times \frac{z^{\frac{5}{3}}}{a+x^{\frac{3}{2}}}$.

Se la formola fosse $\frac{x dx}{a+x^{\frac{3}{2}}}$, avremmo per inte-
 grale $2\sqrt{a+x} + \frac{2a}{\sqrt{a+x}}$.

29. Generalmente: sia $ax^t dx \times \frac{1}{a+x^{\frac{n}{m}}}$, e sieno
 gli esponenti t, m, n numeri interi positivi; posta al fo-
 lito $\frac{1}{a+x^{\frac{n}{m}}} = z$, e però $a+x = z^{\frac{n}{m}}$, $dx = \frac{n}{m} z^{\frac{n}{m}-1} dz$,

$x^t = z^{\frac{n}{m}t} - a$, e fatte le sostituzioni, la formola farà

$z^{\frac{n}{m}t} - a \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}-1} dz$, e fatta attualmente la potenza t ,

ciascun termine, come è chiaro, farà algebricamente
 integrabile, ne' quali termini integrati restituito in luogo
 di z il valore dato per x , avremo l'integrale algebrico
 della proposta formola. c

30. Se l'esponente m fosse negativo di modo, che la quantità sotto il segno passasse nel denominatore, nel qual caso l'esponente m viene ad essere positivo; cioè la formola fosse $\frac{ax^r dx}{a+x^{\frac{m}{n}}}$, fatte le stesse sostituzioni,

avremmo $z^{\frac{n}{m}} - a \times \frac{an}{m} z^{\frac{n}{m}-1} dz$, e fatta at-

tualmente la potestà z , sarebbe pure ogni termine algebricamente integrabile, salvi que' casi, ne' quali s'infiniti la potestà $z^{-1} dz$, che obbliga a' logaritmi.

Ma se l'esponente r sarà negativo, non faranno algebricamente integrabili le due suddette formole, faranno bensì libere da' radicali, e ridotte alle quadrature del circolo, e dell'iperbola, come si vedrà a suo luogo.

31. Ma quand'anche la variabile sotto il segno sia elevata a qualunque potestà maggiore dell'unità, purchè la quantità fuori del segno sia la precisa differenziale, o una proporzionale qualunque alla differenziale della quantità sotto il segno, per mezzo della stessa semplicissima sostituzione si avranno gl'integrali delle formole differenziali, i quali integrali faranno sempre algebrici, e però

Sia $xx dx \sqrt{xx+aa}$. Pongo $\sqrt{xx+aa} = z$, onde $xx+aa = zz$, $xx dx = zz dz$, e fatte le sostituzioni, avremo

fatte le sostituzioni, avremo $\frac{4z^4 dz}{15}$, ed integrando;
 $\frac{4z^5}{15}$, e restituendo in luogo di z il valore dato per x ,
 sarà $\frac{4}{15} \times \frac{1}{x^3 - axx^4}$.

Se la formola fosse stata $\frac{3xxdx - 2axdx}{3 \sqrt[4]{x^3 - axx}}$, avrem-

mo per integrale $\frac{4}{9} \times \frac{1}{x^3 - axx^4}$.

Sia $2xxdx \sqrt[3]{\frac{1}{xx + aa^2}}$, cioè $2xxdx \times \frac{1}{xx + aa^2}^{\frac{2}{3}}$;
 pongo $\frac{1}{xx + aa^2}^{\frac{2}{3}} = z$, e però $xx + aa = z^{\frac{3}{2}}$, e
 $2xxdx = \frac{3}{2} z^{\frac{3}{2}-1} dz$, e fatte le sostituzioni, avremo
 $\frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} dz$, ed integrando $\frac{3}{5} z^{\frac{5}{2}}$, e restituendo in luogo

di z il valore dato per x , $\frac{3}{5} \times \frac{1}{xx + aa} \sqrt[3]{\frac{1}{xx + aa^2}}$.

Se la formola fosse $\frac{2xxdx}{\sqrt[3]{xx + aa^2}}$, avremmo per in-
 tegrale $3 \sqrt[3]{xx + aa}$.

Sia

Sia generalmente la formola $p x^{m-1} dx \times \sqrt[n]{x^m + a^m}$,
 in cui p , ed m possono anche essere numeri rotti:
 pongo $\sqrt[n]{x^m + a^m} = z$, e però $z^n = x^m + a^m$, ed
 $m x^{m-1} dx = \frac{u}{n} z^{\frac{n}{n}-1} dz$, e fatte le sostituzioni, avremo
 $\frac{pu}{n} z^{\frac{n}{n}} dz$, ed integrando, $\frac{pu}{mn + mn} \times z^{\frac{n+n}{n}}$, e resti-
 tuendo in luogo di z il valore dato per x , avremo
 per integrale $\frac{pu}{mn + mn} \times \sqrt[n]{x^m + a^m} \times \sqrt[n]{x^m + a^m}^{\frac{n}{n}}$.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse
 $\frac{p x^{m-1} dx}{\sqrt[n]{x^m + a^m}}$, in cui n è positivo, avremmo per inte-
 grale $\frac{pu}{mn - mn} \times \sqrt[n]{x^m + a^m}^{\frac{n-n}{n}}$.

Quindi formeremo la regola generale, che l'integrale di tali formole farà la quantità sotto al segno, accrescendo dell'unità l'esponente, e dividendola per esso esponente così accresciuto, o pure l'integrale farà un proporzionale di questo, secondo la proporzione, che averà la quantità differenziale fuori del segno al differenziale preciso.

32. Ma più generalmente ancora: sia la formola

$p x^{rm-1} dx \times \sqrt[n]{x^m + a^m}$, supposto però r numero intero, e positivo. Essa equivale a quest'altra

$p x^{rm-m} \times x^{m-1} dx \times \sqrt[n]{x^m + a^m}$; pongo al solito

$z = \sqrt[n]{x^m + a^m}$, e però $x^m + a^m = z^n$, ed

$m x^{m-1} dx = \frac{u}{n} z^{\frac{n}{m}-1} dz$; e perchè $x^m = z^n - a^m$, fa-

rà pure $x^{rm-m} = z^{\frac{u}{n} - a^m}$. Fatte adunque le so-

stituzioni, avremo $p \times z^{\frac{u}{n} - a^m} \times \frac{u}{mn} z^{\frac{n}{m}-1} dz$. Ma

posto r numero intero, e positivo, farà pure $r-1$ intero, e positivo, adunque fatta attualmente la potenza $r-1$, ciascun termine farà algebricamente integrabile, nel qual integrale restituito in luogo di z il valore dato per x , avremo l'integrale della proposta formola.

Se n fosse negativo, cioè se la formola fosse $p x^{rm-1} dx \times \sqrt[n]{x^m + a^m}$, in cui n è positivo, fatte le sostituzioni,

farebbe

farebbe $p \times z^{\frac{n}{m}-1} \times \frac{u}{mn} z^{\frac{n}{m}-2} dz$ parimente integrabile, e però ec.

Se in tutti quelli casi la quantità sotto il vincolo in luogo di essere $x^m + a^m$ fosse $x^m - a^m$, o pure $a^m - x^m$, si proceda nello stesso modo, che ciò nulla turba l'operazione.

Con questo metodo troveremo per tanto, che sarà

$$\int ax^{m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = \frac{2a}{3mf} \times \overline{e+fx^m}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = \frac{2a}{mf} \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{2m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = -\frac{4e+6fx^m}{15mf} \times a \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{2m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = -\frac{4e+2fx^m}{3mf} \times a \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int ax^{3m-1} dx \sqrt{e+fx^m} = a \times \frac{16ee-24efx^m+3offx^{2m}}{105f^3m} \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{ax^{3m-1} dx}{\sqrt{e+fx^m}} = \frac{16ee-8efx^m+6ffx^{2m}}{15mf^3} \times a \times \overline{e+fx^m}^{\frac{1}{2}},$$

e così

e così di mano in mano quanti altri si vuole :

33. Ancora nel caso, che la variabile fuori del segno sia nel denominatore, la formola farà algebricamente integrabile col mezzo di due sostituzioni, purchè l'esponente di essa variabile fuori del segno abbia una condizione, cioè la formola sia $\frac{dx \times \frac{x^m + a^m}{y^u}}{x^m + a^m}^{\frac{n}{u}}$. Si faccia

$$x = \frac{ay}{y^u}, \quad dx = -\frac{aady}{yy^u}, \quad x^m = \frac{a^{2m}}{y^m}, \quad \frac{x^m + a^m}{y^u}^{\frac{n}{u}} = \frac{a^{2m} + a^m y^m}{y^u}^{\frac{n}{u}}. \text{ Fatte le sostituzioni, farà la formola}$$

$$-\frac{aady \times \frac{a^{2m} + a^m y^m}{y^u}^{\frac{n}{u}}}{yy \times y^u \times a^{\frac{2m}{u} + \frac{2m}{u} + 1}}.$$

$$\text{cioè } \frac{a^{2m} + a^m y^m}{a^{\frac{2m}{u} + \frac{2m}{u} + 1}}^{\frac{n}{u}} \times -y^{2m-1} dy,$$

formola, che à le condizioni quì sopra ricercate, e che per mezzo della sostituzione notata (num. 32.) s'integrerà algebricamente.

Se

Se fosse proposta la formola $\frac{a^x dx}{x^2 \sqrt{ax + x^2}}$, cioè

$$\frac{a^x dx}{x^2 \sqrt{ax + x^2}}, \text{ avendo questa le condizioni ricercate,}$$

farà algebricamente integrabile, e ciò si offervi d'altre ancora.

34. Ma qui avvertasi, che nella formola generale la u può anche essere eguale all'unità, nel qual caso la potestà di $x^m + a^m$ farà razionale, cioè intera.

Anche in questo caso, supposta la n quantità negativa, (giacchè quando è positiva non involge difficoltà alcuna) si può fare uso della stessa sostituzione, e del medesimo metodo, con cui troveransi gl'integrali delle formole, i quali integrali però non saranno sempre algebratici, anzi per lo più dipenderanno in parte dalla quadratura dell'iperbola, cioè dalla logaritmica.

Col noto metodo adunque troveremo, che

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{m-1} dx}{x^m + a^m} &= -\frac{1}{m} \times \frac{1}{x^m + a^m} \\ \int \frac{x^{2m-1} dx}{x^m + a^m} &= \frac{1}{m} \log a^m + x^m + \frac{a^m}{m \times a^m + x^m} \\ \int \frac{x^{3m-1} dx}{x^m + a^m} &= \frac{a^m + x^m}{m} - \frac{2a^m}{m} \log a^m + x^m - \frac{a^{2m}}{m \times a^m + x^m} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{-1}{2m \times a^m + x^m}$$

$$\int \frac{x^{2m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{-1}{m \times a^m + x^m} + \frac{a^m}{2m \times a^m + x^m}$$

$$\int \frac{x^{3m-1} dx}{a^m + x^m} = \frac{1}{m} \sqrt{a^m + x^m} + \frac{2a^m}{m \times a^m + x^m} - \frac{a^{2m}}{2m \times a^m + x^m}$$

e quant' altri si vuole .

35. Ma è bene molto diversa la faccenda allora, quando le proposte formole differenziali, che contengono radicali, non sono tali, che la quantità fuori del segno abbia quelle condizioni da me qui sopra accennate. Queste formole potranno sempre liberarsi dai radicali, purchè un solo ne contengano, il quale sia di radice quadrata, e la incognita sotto di esso non ecceda la seconda dimensione; ma per queste fa d'uopo di qualche riflessione nella scelta delle sostituzioni da farsi, acciò si liberino da' segni radicali; il che fatto, si passa alle integrazioni, o algebriche, o dipendenti dalle quadrature del circolo, e dell'iperbola nelle maniere spiegate, se alle date regole saranno sottoposte; se no, si rapportheranno ad altri canoni, che sono per dare in breve .

Se adunque la radicale della proposta formola fosse $\sqrt{ax \pm xx}$, o pure $\sqrt{xx \pm ax}$, essa radicale si pon-

ga = $\frac{xz}{b}$, intendendo per z una nuova variabile, e per

b una costante qualunque.

Se la radicale fosse $\sqrt{xx \pm aa}$, si ponga la radicale = $x + z$, ovvero, se si vuole, = $x - z$.

Se la radicale fosse $\sqrt{aa - xx}$, o sia $\sqrt{fp - xx}$ si ponga la radicale = $\sqrt{fp + \frac{xz}{b}}$, o pure = $\sqrt{fp - \frac{xz}{b}}$.

Da queste così fatte equazioni si ricavi il valore di x , e di dx , che si averanno dati per z , e le costanti; questi valori si sostituiscano nelle date formole, e si averanno libere dai segni radicali altre formole date per z , nelle sommatorie delle quali, se si potranno avere, restituito il valore di z dato per x , si averanno le sommatorie delle formole proposte.

36. Se la quantità avesse tre termini, cioè il quadrato della variabile col rettangolo di essa nella costante, e di più il termine tutto costante, allora o si levi il secondo termine nella solita maniera dell'algebra cartesiana, o pure, se il termine costante è positivo, come se fosse $\sqrt{xx + ax + aa}$, comunque sieno positivi, o negativi gl'altri, purchè non sia immaginaria la quantità, si faccia $\sqrt{xx + ax + aa} = a + \frac{xz}{b}$; e se il ter-

f 2 mine

mine costante è negativo, come a dire $\sqrt{xx + ax - aa}$,
 si faccia $\sqrt{xx + ax - aa} = x + z$.

Da ciò si vede, che tutto l'artificio consiste in
 paragonare la quantità radicale ad una tale quantità
 composta della data variabile, e di una nuova colle co-
 stanti, sicchè ne risulti un'equazione, da cui si possa
 avere il valore di x , e di dx libero da' segni radicali.

Sia proposta da sommarli la formola differenziale

$x^3 dx \sqrt{ax - xx}$. Pongo $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b}$, e però

$a - x = \frac{xzz}{bb}$, cioè $x = \frac{abb}{zz + bb}$, e $dx = -\frac{zabbzdz}{(zz + bb)^2}$

$x^3 = \frac{a^3 b^3}{(zz + bb)^3}$; e $\sqrt{ax - xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz + bb}$. Fatte le so-

stituzioni nella proposta formola, farà essa $-\frac{2a^3 b^3 z z dz}{(zz + bb)^6}$,

formola bensì libera da' segni radicali, ma che però,
 ciò non ostante, non si fa coi dati metodi maneggiare
 rispetto alle somministrazioni.

Sia $\frac{aadx}{x \sqrt{ax + xx}}$. Pongo $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b}$, e però fa-

rà $x = \frac{abb}{zz - bb}$, $dx = -\frac{zabbzdz}{(zz - bb)^2}$, $\sqrt{ax + xx} = \frac{xz}{b} = \frac{abz}{zz - bb}$.

Fatte

Fatte le sostituzioni nella proposta formola, sarà effa-
 $-\frac{2adz}{b}$, ed integrando $x - \frac{2az}{b}$, e restituendo in luogo
 di z il valore dato per x , sarà $\int \frac{adx}{x\sqrt{ax+xx}} = -\frac{2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}}$. Pongo $\sqrt{ax+xx} = \frac{xz}{b}$, e fatte le

necessarie sostituzioni, come quì sopra, la formola sarà
 $-\frac{2ab'dz}{zz-bb}$, cioè $-\frac{2ab'dz}{z+b \times z-b}$, ma questa già si fa ma-

neggiare con la regola delle frazioni, ed avrà per som-
 matoria $\frac{abz}{zz-bb} + \frac{1}{2}a \int \frac{z-b}{z+b}$ nella logaritmica della

sottangente eguale all'unità; e restituendo in luogo di
 z il valore dato per x , sarà $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+xx}} = \sqrt{ax+xx} +$

$\frac{a}{2} \int \frac{\sqrt{ax+xx}-x}{\sqrt{ax+xx+x}}$ nella logaritmica della stessa sot-

tangente = 1.

Sia $\frac{xdx}{\sqrt{xx+ax-aa}}$. Pongo $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z$,

e però sarà $x = \frac{zz+aa}{a-zz}$, $dx = \frac{2azdz - zzdz + 2aadz}{a-zz}$,

e $\sqrt{xx+ax-aa} = x+z = \frac{aa+az-zz}{a-zz}$. Fatte le so-

stitu-

stituzioni, farà la proposta formola $\frac{zz + az \times 2dz}{a - zz}$, cioè

$\frac{zzdz + 2aazdz}{a - zz}$, ed integrando, il che per le date re-

gole si può fare, $\frac{5aa}{4 \times a - zz}$, $-\frac{a + 2z}{4}$ + $\frac{a}{2} \int \frac{1}{a - zz}$ nel-

la logaritmica della sottangente $= 1$, e restituendo in-
luogo di z il valore dato per x , farà finalmente

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{xx + ax - aa}} = \frac{5aa}{4 \times a + 2x - 2\sqrt{xx + ax - aa}} -$$

$$\frac{a - 2x + 2\sqrt{xx + ax - aa} + \frac{2a}{4} \int \frac{1}{a + 2x - 2\sqrt{xx + ax - aa}}}$$

nella logaritmica della stessa sottangente eguale all'unità.

37. Affatto superflua intorno ad alcune formole differenziali radicali farà la fatica di trasmutarle per mezzo dell'accennate sostituzioni in altre libere da' segni radicali, e così prepararle per le integrazioni, e ciò per tutte quelle, che di natura sua involgono quadratura, o rettificazione di circolo; perchè sebbene si convertiranno in altre essenti da' radicali, queste però ci porteranno allo stesso circolo. E però sia (Fig. 5.) il semicircolo GMD , AD raggio $= a$, $AB = x$, onde $BF = \sqrt{aa - xx}$, e fatta CH infinitamente prossima a

BF ,

BF , sarà $BC = dx$, $EF = \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}}$. Adunque l'espres-

sione del rettangolo infinitesimo $BCHE$ sarà $dx\sqrt{aa - xx}$,

e però $\int dx\sqrt{aa - xx}$ = allo spazio $ABFM$. Sarà pu-

re $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ l'espressione dell'archetto infinitesimo FH ,

e però $\int \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$ = all' arco MF . E se l'archetto

FH si moltiplicherà per la metà del raggio, sarà $\frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}}$ espressione del settore infinitesimo AFH , e

però $\int \frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}}$ = al settore AFM .

Sia ora, nel medesimo circolo, $DC = x$, e $CB = dx$,
sarà $CH = \sqrt{2ax - xx}$, $EF = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Pertanto

$\int dx\sqrt{2ax - xx}$ sarà = allo spazio HCD . Così $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ =

all' arco HD , e $\int \frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}}$ = al settore AHD . In-

queste adunque sarà superflua la fatica; imperciocchè
nel primo caso pongo $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xx}{b}$, e pe-

rò

$$\text{rò } x = \frac{2bz}{zz + bb}, dx = \frac{2ab'dz - 2abzzdz}{zz + bb^2}; \sqrt{aa - xx} =$$

$$\frac{a - xz}{b} = \frac{abb - azz}{zz + bb}. \text{ Fatte le sostituzioni, sarà } \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} =$$

$$\frac{2abdz}{zz + bb}, \text{ formola di rettificazione di circolo, la di cui}$$

tangente = z, come già si è veduto al num. 26.

$$\text{Sarà pure } \frac{aadx}{2\sqrt{aa - xx}} = \frac{aabdz}{zz + bb}, \text{ formola, che invol-}$$

ve la stessa rettificazione.

$$\text{Istessamente sarà } dx\sqrt{aa - xx} = \frac{2aabdzz \times \sqrt{bb - zz}}{zz + bb^3},$$

formola, che sebbene non si fa per ora maneggiare, si vedrà però in appresso dipendere dallo stesso circolo.

Nel secondo caso pongo $\sqrt{2ax - xx} = \frac{xz}{b}$, e però

$$x = \frac{2abb}{zz + bb}, dx = -\frac{4abbzdz}{zz + bb^2}, \text{ e } \sqrt{2ax - xx} = \frac{xz}{b} = \frac{2abz}{zz + bb}.$$

$$\text{Fatte le sostituzioni, sarà } \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} = -\frac{2abdzz}{zz + bb}, \text{ rettifi-}$$

cazione di circolo.

$$\text{Sarà pure } \frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}} = -\frac{aabdzz}{zz + bb}, \text{ rettificazione}$$

di circolo come sopra.

Istessa-

Itteffamente farà $dx \sqrt{22x - xx} = - \frac{82ab'zzdz}{\sqrt{22 + bb}}$,

che involve lo ſteſſo circolo .

38. Se le noſtre formole differenziali faranno compoſte di due quantità radicali , l'operazione farà in queſto caſo raddoppiata , ma ſuccederà egualmente bene , purchè nelle quantità radicali manchi , o ſia tolto il ſecondo termine , e la formola ſia moltiplicata per una poteſtà diſpari dell'incognita ; e ciò col porre una delle quantità radicali eguale ad una nuova variabile , e coſì la propoſta formola farà ridotta ad un'altra , che conterrà una ſola radicale , e che per conſeguenza ſi maneggerà nella ſolita maniera ..

Sia per eſempio $x' dx \sqrt{aa + xx}$. Pongo $\sqrt{aa + xx} = y$,
 $\sqrt{bb + xx}$

e però $xx = yy - aa$, $x dx = y dy$. Fatte le ſoſtituzioni , farà $\frac{yy dy \times \sqrt{yy - aa}}{\sqrt{yy - aa + bb}}$, cioè $\frac{y^2 dy}{\sqrt{yy - aa + bb}} - \frac{aayy dy}{\sqrt{yy - aa + bb}}$,
 ciaſcheduna delle quali ſi fa maneggiare .

39. Per poco , che ſi riſletta a queſta maniera di operare , è facile a conoſcere , che in queſte formole radicali non ſuccederà di poterle generalmente liberare dal vincolo radicale , ſe non quando ſia radice quadrata , e la incognita ſotto il vincolo non ecceda la ſeconda dimenſione . Diſſi generalmente ,

g

perchè

perchè in parecchj casi succede la faccenda , qualunque siasi il segno radicale , e qualunque la potestà dell'incongnita sotto il segno , e certamente in tutti i casi compresi dalle due seguenti formole , la prima delle quali

sarà $\frac{dy \times \sqrt{y^m + b^m}}{y^{tm+1}} \pm \frac{1}{n}$, in cui m, n, t sono numeri in-

tieri , e positivi , e possono anche essere zero , e ciò

s'ottiene facendo $\sqrt{y^m + b^m}^{\frac{1}{n}} = z$, e però $y^m = z^n - b^m$,
 $dy = \frac{nz^{n-1} dz}{my^{m-1}}$, onde fatte le sostituzioni , sarà

$\frac{nz^{n-1} dz \times z^{\pm 1}}{my^{tm+m}}$, cioè $\frac{nz^{n-1} dz \times z^{\pm 1}}{my^{\frac{t+1}{n} \times m}}$, ma

$y^{\frac{t+1}{n} \times m} = z^n - b^m$, e quando t sia numero intero , sarà intiera la potestà $t+1$; adunque la proposta formola sarà libera da' radicali .

Se t fosse negativo , la formola sarebbe il caso di sopra considerato al numero 32. , che à integrale algebrico .

Negl' altri casi l'integrale dipenderà dalle quadrature del circolo , e dell' iperbola , come si vedrà a suo luogo .

La seconda formola è $y^n dy \times \sqrt{y^m + b^m}^{\pm \frac{1}{p}}$, la quale,

quale , quando sia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero , si potrà sem-

pre liberare da' segni radicali , o in tutto , o almeno da' radicali di quantità complesse , il che basta . Si faccia

per tanto $\sqrt[m]{y^m + b^m}^{\frac{1}{p}} = z$, e però sarà $y^m = z^{\frac{p}{1}} - b^m$,

$y = z^{\frac{p}{1}} - b^m$, $dy = \frac{p}{1} z^{\frac{p}{1}-1} dz \times \sqrt[m]{z^{\frac{p}{1}} - b^m}^{\frac{1}{m}-1}$, ed

$y^n = z^{\frac{p}{1}} - b^m$, e fatte le sostituzioni , avremo la

formola $\frac{p}{1} z^{\frac{p}{1}-1} dz \times z^{\frac{1}{m}} \times \sqrt[m]{z^{\frac{p}{1}} - b^m}^{\frac{1}{m} + \frac{n}{m}-1}$, ma

quando sia $\frac{n+1}{m}$ numero intiero , farà sempre intiera

la potestà $\frac{1+n}{m}-1$, adunque la formola non avrà mai

segni radicali di quantità complesse . E però quando sia $\frac{1+n}{m}-1$ numero intiero , e positivo , l'integrale al più di-

penderà dalla quadratura dell' iperbola , o sia dalla logaritmica , e si potrà avere per le regole date ; e quando sia $\frac{1+n}{m}-1$ numero intiero negativo , l'integrale dipen-

derà dalle quadrature del circolo , e dell' iperbola , e si avrà per le regole da darsi a suo luogo .

40. Passando ora a quelle formole , che essendo

g 2 frazioni

frazioni libere da' radicali, nel denominatore di esse (che suppongo composto di radici immaginarie, poichè in queste sole sta la difficoltà) la incognita sia elevata a qualunque potestà, dico : che ogni qual volta il denominatore sia riducibile in componenti reali, ne quali la incognita non ecceda la seconda dimensione, si potrà sempre spezzare la formola in tante frazioni, quanti sono i suddetti componenti reali, ciascuna delle quali sarà integrabile, supposte le quadrature del circolo, e dell' iperbola, ed in conseguenza la proposta formola sarà sempre riducibile alle stesse quadrature. Per lo che fare : sia proposta la formola

$\frac{aax}{xx+ax+bb \times xx+cx+cb}$, si finga un' equazione, cioè, che sia

$\frac{aax}{xx+ax+bb \times xx+cx+cb} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+ax+bb} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+cx+cb}$, nella quale formola le majuscole A, B, C, D sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso.

Così se fosse la formola

$\frac{abdx}{xx+ax+bb \times xx \pm aa \times x \pm c}$, si faccia

$abdx$

$$\frac{abdx}{xx+ax+bb} \times \frac{xx \pm aa}{xx \pm aa} \times \frac{x \pm c}{x \pm c} = \frac{Axdx+Bdx+Cxdx+Ddx}{xx+ax+bb}$$

se i componenti del denominatore fossero in maggior numero. Il che fatto, si riducano allo stesso denominatore i termini di queste equazioni, e finalmente con la trasposizione si riduca l'equazione al zero, indi col paragone de' primi termini al zero si ritroverà il valore dalla assunta A ; col paragone de' secondi, terzi, quarti ec. si troveranno i valori delle assunte B, C, D , ec. dati per le costanti della proposta formola, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole A, B, C, D ec. nella equazione, ci somministreranno tante frazioni, le quali equivagliono alla proposta, ed in fatti, ridotte al comune denominatore, appunto restituiranno la formola da prima proposta.

Prendiamone un' esempio. Sia proposta da integrarsi la formola

$$\frac{aadx}{xx+2ax-aa} \times \frac{xx+aa}{xx+aa}$$

Fingo adunque, che sia

$$\frac{aadx}{xx+2ax-aa} \times \frac{xx+aa}{xx+aa} = \frac{Axdx+Bdx}{xx+2ax-aa} + \frac{Cxdx+Ddx}{xx+aa}$$

Riduco adunque al comune denominatore l'equazione, indi col trasportare il termine $aadx$, la riduco

al zero, e si trova essere

$$\begin{aligned} Ax^1 dx + Bxxdx + Aaxdx + Baadx \\ Cx^1 dx + Dxxdx + 2Daxdx - Daadx = 0. \\ + 2Caxdx - Caaxdx - aadx \end{aligned}$$

Per tanto dal paragone de' primi termini al zero si averà $A + C = 0$, cioè $A = -C$; de' secondi $B + D + 2Ca = 0$, cioè ponendo $-A$ in luogo di C , $B = 2Aa - D$; de' terzi $Aaa + 2Da - Ca = 0$, cioè $C = A + \frac{2D}{a}$; degl' ultimi $Baa - Da - aa = 0$,

cioè ponendo in luogo di B il valore dato per D , e per A , farà $D = Aa - \frac{1}{2}$; adunque farà $C = \frac{3Aa - 1}{a}$,

ma $C = -A$, e però $A = \frac{1}{4a}$, $D = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{3}{4}$,

$C = -\frac{1}{4a}$, onde avremo finalmente

$$\frac{aadx}{xx + 2ax - aa} \times \frac{xx + aa}{4a} = \frac{xxdx + 3aadx}{4a \times \frac{xx + 2ax - aa}{4a}} - \frac{xxdx - aadx}{4a \times \frac{xx + aa}{4a}}$$

Ma l'omogeneo di comparazione, facendo sparire ove fa d'uopo il secondo termine dal denominatore, è integrabile con le quadrature del circolo, e dell'iperbola, il di cui integrale con le date regole si troverà

$$\text{essere } \frac{1}{4a} \int \sqrt{xx + 2ax - aa} + \frac{1}{2\sqrt{2aa}} \int \sqrt{x + a} - \sqrt{2aa} -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2aa}} \int \sqrt{x + a + \sqrt{2aa}} - \frac{1}{4a} \int \sqrt{xx + aa}, \text{ sottraendo}$$

in

in oltre da questi logaritmi il quarto proporzionale di $4aa$, dell'unità, e dell'arco di circolo, che abbia il raggio $= a$, e la tangente $= x$. Adunque l'integrale di questa formola non dipende da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

41. Se in oltre la frazione sarà moltiplicata in una qualunque potestà dell'incognita, la quale potestà sia positiva, come se fosse l'equazione.

$$\frac{aax^n dx}{xx + 2ax - aa} \times \frac{xx + aa}{xx + aa}, \text{ si faccia}$$

$$\frac{aax^n dx}{xx + 2ax - aa} = \frac{Ax^{n+1} dx + Bx^n dx}{xx + 2ax - aa} +$$

$$\frac{Cx^{n+1} dx + Dx^n dx}{xx + aa}, \text{ e si trovino nello stesso modo,}$$

come sopra, i valori delle majuscole A, B, C cc., o pure si operi, come se la detta potestà non vi fosse, e le risultanti frazioni si moltiplichino per la stessa potestà, ed avremo parimenti altrettante frazioni, che non esiggeranno quadrature superiori a quelle del circolo, e dell'iperbola, e che si sapranno maneggiare colle date regole.

42. E se la potestà della variabile sarà negativa; cioè, se sarà positiva nel denominatore, per questa potestà si moltiplichino tutti i denominatori delle frazioni risultanti, e faranno della seguente forma.

Sia

Sia per esempio

$$x^{-n} dx$$

$$xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c$$

rifoluta questa, come se non vi fosse la x^{-n} , ed indi moltiplicando ogni termine per x^{-n} , farà

$$x^{-n} dx = \frac{Axdx + Bdx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c} +$$

$$\frac{Cxdx + Ddx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c} + \frac{Hdx}{x \pm c \times x^n}$$

$$\frac{Cxdx + Ddx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c} + \frac{Hdx}{x \pm c \times x^n}, \text{ intendendo già per le}$$

majuscole que' tali valori ritrovati con la data maniera, che rendano la somma di queste frazioni eguale alla proposta.

L'ultima frazione non avrà bisogno d'altro artificio, perchè si saprà integrare colle date regole.

Quanto alla prima: sia per chiarezza d'esempio $A = aa$, $B = abb$, onde si esprima così

$$\frac{aaxdx + abbdx}{xx + ax + bb \times x^n}, \text{ si faccia}$$

$$\frac{aaxdx + abbdx}{xx + ax + bb \times x^n} = \frac{Mxdx + Ndx}{xx + ax + bb} +$$

$$\frac{Px^{n-1}dx + Hx^{n-2}dx + Ex^{n-3}dx \text{ ec.}}{x^n} \text{ così profe-}$$

guendo fino, che l'ultimo termine sia costante, cioè zero la potenza dell'incognita x . Ridotte queste frazioni al comune denominatore, e ridotta al zero l'equazione,

zione, avremo, come s'è fatto di sopra, i valori delle majuscole. Lo stesso si faccia rispetto all'altra frazione $\frac{Cx dx + D dx}{xx \pm aa \times x^n}$, e troverassi finalmente l'integrale della proposta formola.

E però generalmente, supposte le sole quadrature del circolo, e dell' iperbola, si potrà sempre avere l'integrale della formola

$$\frac{x^{\pm n} dx}{xx + ax + bb \times xx \pm aa \times x \pm c \text{ ec.}}$$

comunque sieno i componenti reali del denominatore, purchè in essi la incognita non ecceda la seconda dimensione.

43. Ma se il denominatore della proposta formola, o frazione non sarà risoluto ne' suoi componenti reali, ne' quali l'incognita non ecceda la seconda dimensione, nè tale si potrà ridurre colle regole ordinarie dell'algebra, si potrà sempre però con un poco d'artifizio ridurlo tale, ogni qual volta egli sia una formola convertibile, o pure il prodotto di più formole convertibili. Formole convertibili chiamerò quelle, nelle quali la variabile abbia il massimo numero delle sue dimensioni pari affermativo, quale sia per esempio n , l'ultimo termine sia a^n , indi i termini equidistanti da quello di mezzo abbiano il medesimo coefficiente, ed affetto dal medesimo segno, supplite le dimensioni colla costante,

h

da

da cui è formato l'ultimo termine; tale sarebbe la formola $x^6 + a^6$, o pure l'altra $x^6 + bx^5 + ccxx + aabx + a^6$, o l'altra $x^6 - bx^5 + b^2x^4 - a^2bx^3 + a^6$. Che se fosse $x^5 + bx^4 + a^2x^3 + a^2b$, si scriva essa nell'equivalente formola $\overline{x^5 + a^2} \times \overline{x + b}$, in cui $x^5 + a^2$ è formola convertibile, ed $x + b$ è lineare, che non apporta difficoltà alcuna. Lo stesso s'intenda d'infinite altre.

44. Abbiasi ora adunque $x^m - a^m$ da risolvere in componenti reali, ne quali x non ecceda la seconda dimensione, e che non abbia esponenti rotti, e sia in primo luogo m numero intero affermativo pari. In tal caso sarà egli divisibile in $x^{\frac{1}{2}m} + a^{\frac{1}{2}m}$, ed $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$ senza frazione negl'esponenti; per essere m numero intero pari. Il primo divisore si risolverà per le regole, che si daranno fra poco per il binomio $x^m + a^m$. Il secondo $x^{\frac{1}{2}m} - a^{\frac{1}{2}m}$, se $\frac{1}{2}m$ sarà numero pari, si risolverà nuovamente in $x^{\frac{1}{4}m} + a^{\frac{1}{4}m}$, ed $x^{\frac{1}{4}m} - a^{\frac{1}{4}m}$ senza frazione negl'esponenti. Ma se $\frac{1}{2}m$ sarà numero dispari, si risolverà per le regole da prescriversi per il binomio $x^m - a^m$ quando m è numero dispari.

Sia in secondo luogo $x^m + a^m$, e sia m numero intero affermativo pari, nel qual caso la formola è

con-

convertibile. Si supponga $x^m + a^m = 0$, indi si formi una formola convertibile, in cui il massimo esponente di x sia $m-2$, e che abbia tutti i termini, e l'ultimo termine sia a^{m-1} , ed il coefficiente del secondo termine sia per esempio b , quello del terzo sia cc , quello del quarto d' ec., e questa si paragoni al zero, onde ne risulti un'equazione. Tale equazione si moltiplichi per $xx + fx + aa$; il prodotto farà un'altra equazione convertibile, in cui l'esponente massimo di x farà $= m$. Questa equazione si paragoni termine per termine coll'equazione fittizia $x^m + a^m = 0$, in cui i coefficienti de' termini intermedj sono $= 0$, e cavando dal paragone de' secondi termini il valore dell'assunta b , dal paragone de' terzi il valore dell'assunta cc , da quello de' quarti il valore dell'assunta d' , e così fino al termine di mezzo, compreso anche questo (giacchè di là dal medio l'altre equazioni tornerebbero le medesime, per essere le equazioni, che si paragonano, convertibili) da quest'ultimo si caverà il valore di f espresso con una equazione, che avrà numero $\frac{m}{2}$ dimensioni,

di cui tutte le radici faranno reali, e ci daranno i valori di f , che sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$ daranno altrettanti trinomj, il prodotto de' quali restituirà il proposto binomio $x^m + a^m$.

Sia $x^4 + a^4$. Prendo un'equazione convertibile del
h 2
fe-

secondo grado $xx + bx + aa = 0$, la moltiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne ricavo un'altra equazione convertibile $x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 + fx^2 + bfx + aabx = 0$. Paragono questa con la fittizia $x^4 + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$, cioè $b = -f$; dal paragone de' termini di mezzo trovo $2aa + bf = 0$, e sostituito in luogo di b il suo valore $-f$, trovo $ff - 2aa = 0$, onde $f = \pm \sqrt{2aa}$.

Sia $x^4 + a^4$. Prendo l'equazione convertibile $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$, la moltiplico per $xx + fx + aa = 0$, e ne risulta l'equazione

$$\begin{aligned} x^4 + bx^3 + ccxx + 2aabx^3 + a^4xx + a^4fx + a^4 \\ + fx^2 + bfx + fccx^3 + aabfxx + a^4bx \\ + aax^4 + aacccx \end{aligned} = 0.$$

Paragono questa con la fittizia $x^4 + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, cioè sostituendo il valore di b , $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + fcc = 0$, cioè sostituendo in luogo di b , e di cc i suoi valori, $f^3 - 3aaf = 0$.

Facendo attualmente queste operazioni si troverà adunque, che

$$\text{Se } m = 4, \text{ sarà } ff - 2aa = 0.$$

$$\text{Se } m = 6, \text{ sarà } f^3 - 3aaf = 0.$$

$$\text{Se } m = 8, \text{ sarà } f^5 - 4aaff + 2a^4 = 0.$$

Se

Se $m = 10$, farà $f^5 - 5af^4 + 5a^2f^3 = 0$.

Se $m = 12$, farà $f^6 - 6af^5 + 9a^2f^4 - 2a^3f^3 = 0$.

Se $m = 14$, farà $f^7 - 7af^6 + 14a^2f^5 - 7a^3f^4 = 0$,

e così si può procedere per gli altri valori pari di m .

In luogo di $x^4 + a^4$, sia $x^4 + 2bx^3 + 2abx^2 + a^4$, formola pure convertibile. Moltiplico l'equazione convertibile $xx + bx + aa = 0$ per $xx + fx + aa = 0$, ed averò, come sopra, $x^4 + bx^3 + 2aaxx + aafx + a^4 = 0$,
 $+ fx^3 + bfx^2 + anbx$

Paragono questa con l'equazione fittizia $x^4 + 2bx^3 + 2abx^2 + a^4 = 0$, e dal paragone de' secondi termini trovo $b + f = 2b$, cioè $b = 2b - f$; dal paragone de' medj trovo $2aa + bf = 0$, e sostituendo in luogo di b il suo valore, si à $2aa + 2bf - ff = 0$, cioè $ff - 2bf - 2aa = 0$.

Sia $x^4 + a^4x^3 + a^4$. Prendo l'equazione convertibile $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = 0$; la moltiplico per $xx + fx + aa$, ed avrò

$$\begin{aligned} x^6 + bx^5 + ccx^4 + 2abx^3 + a^4xx + a^4fx + a^4 \\ + fx^5 + bfx^4 + cfx^3 + aabfxx + a^4bx \\ + aax^4 + aaccxx \end{aligned} = 0.$$

Paragonata questa con l'equazione $x^6 + a^4x^3 + a^4 = 0$, trovo dal paragone de' secondi termini $b + f = 0$; dal paragone de' terzi trovo $cc + bf + aa = 0$, e posto in luogo di b il suo valore, farà $cc - ff + aa = 0$; dal paragone de' medj trovo $2aab + ccf = a^4$, e posti in
 luogo

luogo di b , e di cc i suoi valori, sarà $f' - 3aaf - a' = 0$, e così di quant' altri si vuole.

Abbiasi adunque $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4$ da risolvere in componenti reali, ne quali x non abbia esponenti rotti, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f , è adunque, $ff - 2bf = 2aa$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = b + \sqrt{2aa + bb}$, $f = b - \sqrt{2aa + bb}$. Sostituito pertanto ciascuno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, troveremo, che $x^4 + 2bx^3 + 2aabbx + a^4$ è il prodotto de' due componenti reali $xx + bx + x\sqrt{2aa + bb} + aa$; $xx + bx - x\sqrt{2aa + bb} + aa$. Così se sia $x^6 + ax^4 + a^2xx + a^4 = 0$. Essendo l'equazione, che dà i valori di f , $f' - 2aaf = 0$, dalla quale si hanno i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = \sqrt{2aa}$, $f = -\sqrt{2aa}$, sarà $x^6 + ax^4 + a^2xx + a^4$ il prodotto de' tre efficienti reali $xx + aa$, $xx + x\sqrt{2aa} + aa$, $xx - x\sqrt{2aa} + aa$.

Abbiasi $x^{10} + a^{10}$. L'equazione, che deve dare i valori di f , è $f^5 - 5axf^3 + 5a^4f = 0$, dalla quale si ricavano i valori di f tutti reali, cioè $f = 0$, $f = a\sqrt[5]{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $f = -a\sqrt[5]{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, $f = a\sqrt[5]{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, $f = -a\sqrt[5]{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Soſti-

Sostituito per tanto ogn'uno di questi valori in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, si troverà, che $x^{10} + a^{10}$ è il prodotto de' cinque efficienti reali $xx + aa$,

$$xx + ax \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + aa, \quad xx - ax \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + aa,$$

$$xx + ax \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} + aa, \quad xx - ax \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} + aa;$$

onde si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx moltiplicato in qualunque costante, ed il denominatore di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola, e potrási avere con le date regole.

45. Sia poi $x^m \pm a^m$ da risolvere, come sopra, e sia m numero intero affermativo, ma dispari.

La formola si divida per $x \pm a$, ed il quoziente, (che nel primo caso sarà $x^{m-1} - ax^{m-2} + aax^{m-3} - a^2x^{m-4}$ ec. sino all'ultimo termine, che sarà $+a^{m-1}$; e nel secondo caso sarà $x^{m-1} + ax^{m-2} + aax^{m-3} + a^2x^{m-4}$ ec. sino all'ultimo termine, che sarà $+a^{m-1}$) si supponga $= 0$, e questa finta equazione, che è convertibile, si paragoni termine per termine col prodotto di una equazione convertibile, in cui il numero delle dimensioni dell'incognita x sia $m-3$, nel trinomio $xx + fx + aa$, e dal paragone de' secondi termini si caverà

verà il valore dell'assunta, per esempio b , da quello de' terzi il valore di cc , da quello de' quarti il valore di d' ; e finalmente dal paragone de' termini di mezzo si caveranno i valori di f espressi con una equazione di numero $\frac{m-1}{2}$ dimensioni, della quale tutte le radici

faranno reali, e determineranno i valori di f tutti reali, che sostituiti nel trinomio $xx + fx + az$, verranno a somministrarci altrettanti trinomi, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per $x \pm a$ restituiranno la proposta formola $x^m \pm a^m$.

Con questo metodo si trovano le infrascrutte equazioni, che servono per la risoluzione del binomio $x^m + a^m$ quando m è numero intero affirmativo dispari.

Se $m = 3$, sarà $f + a = 0$.

Se $m = 5$, sarà $ff + af - aa = 0$.

Se $m = 7$, sarà $f^3 + aff - 2a^2f - a^3 = 0$.

Se $m = 9$, sarà $f^4 + af^3 - 3a^2ff - 2a^3f + a^4 = 0$.

Se $m = 11$, sarà $f^5 + af^4 - 4a^2f^3 - 3a^3ff + 3a^4f + a^5 = 0$.

Se $m = 13$, sarà $f^6 + af^5 - 5a^2f^4 - 4a^3f^3 + 6a^4ff + 3a^5f - a^6 = 0$.

E così si può procedere per gli altri valori dispari di m .

Se la formola proposta fosse stata $x^m - a^m$, essendo m numero intero affirmativo dispari, fatta, come si è detto, la divisione per $x - a$, le medesime equazioni

ni avrebbero luogo, mutati i segni nel secondo, quarto, sesto termine, ed in tutti gl'altri posti ne' luoghi pari.

46. Se in luogo di $x^m \pm a^m$, posto m numero intero affermativo dispari, la formola fosse qualunque altra, ma tale, che divisa per $x \pm$ una costante, ciò che ne risulta fosse una formola convertibile, come sarebbe $x^3 + bx^2 - aax^2 - aabxx + a^2x + a^2b$, la quale divisa per $x + b$ dà $x^2 - aaxx + a^2$, trattata quest'ultima al solito, e trovati i valori di f , e sostituiti nel trinomio $xx + fx + aa$, averemo altrettanti trinomj, che insieme moltiplicati, e moltiplicati per $x + b$, restituiranno la proposta formola.

Debba, per esempio, risolversi $x^3 + a^3$ in efficienti reali, ne' quali x non abbia esponenti rotzi, e non ecceda la seconda dimensione. L'equazione, che deve dare i valori di f (secondo le cose dette) farà $ff + af - aa = 0$, dalla quale cavati essi valori di f , che sono $f = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$, e sostituiti in luogo di f nel

trinomio $xx + fx + aa$, averemo due trinomj reali $xx - \frac{ax + ax\sqrt{5}}{2} + aa$, ed $xx - \frac{ax - ax\sqrt{5}}{2} + aa$, il prodotto de' quali con $x + a$ restituisce la formola proposta $x^3 + a^3$.

Debba dividerli in efficienti reali la formola

i la

la $x^3 + bx^2 - aax^2 - aabxx + a^2x + a^2b$, che divisa per $x + b$ ci dà $x^2 - aaxx + a^2$.

L'equazione di f per questa sarà $ff = 3aa$, ed i valori di f saranno $f = \pm \sqrt{3aa}$. Sostituiti questi in luogo di f nel trinomio $xx + fx + aa$, avremo due trinomi reali $xx + x\sqrt{3aa} + aa$, $xx - x\sqrt{3aa} + aa$, il prodotto de' quali con $x + b$ restituisce la proposta formola.

47. Da ciò si conclude, che l'integrale di qualunque formola differenziale, il di cui numeratore sia dx in qualunque costante, ed il denominatore sia di simil natura a questi, che si sono considerati, non dipenderà mai da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola, e potrási avere con le date regole.

48. Ma perchè nelle dimensioni più alte il valore di f dalle equazioni di sopra riferite non può coll'attuale separazione ricavarli, in questi casi basterà rivolgersi alla costruzione geometrica delle medesime equazioni. Così per ritrovare i componenti di $x^7 + a^7$, ed indi l'integrale della formola $\frac{dx}{x^7 + a^7}$, diviso il deno-

minatore per $x + a$, il quoziente sarà $x^6 - ax^5 + aax^4 - a^2x^3 + a^2xx^2 - a^3x + a^6$. I valori di f per risolvere questa formola sono somministrati dall'equazione $f^2 + aff - 3aaf - a^7 = 0$. Ritrovati per tanto coi metodi

todi soliti dell'algebra, per mezzo dell'intersecazione di due curve, o in altro modo i valori veri, e falsi di f , che saranno tutti reali, per esempio, uno A , l'altro $-B$, l'altro $-C$, la quantità $x^2 + a^2$ sarà il prodotto di $x + a$ in $xx + Ax + aa$ in $xx - Bx + aa$ in $xx - Cx + aa$, e le quantità A, B, C saranno reali, e date; onde si potrà procedere alla integrazione della formola $\frac{dx}{x^2 + a^2}$ per le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola.

49. Col medesimo artificio, con cui si trovano le equazioni per risolvere il binomio $x^m \pm a^m$, si possono ritrovare per risolvere il trinomio $x^{2m} \pm 2aax^m + aa$, essendo $2m$ numero intero affermativo pari; anzi generalmente ogni qual volta si proponga da risolvere una formola, che sia convertibile, o il prodotto di convertibili in lineari, e che non abbia frazioni negl'espONENTI, sempre potrà ridursi col metodo di sopra esposto.

Il caso del prodotto di formola convertibile in una lineare l'abbiamo quando m è dispari, ed altrove. Esempio dell'altre sia $x^3 + b^3x - a^3x - a^3b^3$, cioè $x^3 + b^3 \times x - a^3$, o sia $x^3 + b^3 \times xx + aa \times xx - aa$. Risolto per tanto ne' suoi efficienti reali di due dimensioni il divisore $x^2 + b^2$, che sieno per esem-

più $xx + Ax + bb$, $xx + Bx + bb$, sarà

$$\frac{x^4 + b^4 \times x^4 - a^4}{xx + Ax + bb} \times \frac{xx + Bx + bb}{xx + aa} \times \frac{xx - aa}{xx - aa}.$$

E se fosse stato $x^4 + b^4 \times x^4 + a^4$, risoluto in oltre $x^4 + a^4$ in $xx + Cx + aa$, ed $xx + Dx + aa$, sarebbe $\frac{x^4 + b^4 \times x^4 + a^4}{xx + Ax + bb} \times \frac{xx + Bx + bb}{xx + Cx + aa} \times \frac{xx + Dx + aa}{xx + aa}.$

50. Per avere l'integrale della formola $\frac{mx^m dx}{x^m \pm a^m}$,

in cui m esprime un qualunque numero intero affermativo, si chiamino A , B , C , ec. i valori di f coi loro segni, che servono per la risoluzione del denominatore $x^m \pm a^m$, e si avverta, che di questi valori uno può alle volte essere $= 0$, il che seguirà qualunque volta, essendovi $x^m + a^m$ nella detta formola, sia m un numero della serie 2, 6, 10, 14, 18 ec., e qualunque volta, essendovi $x^m - a^m$ nella data formola, sia m un numero della serie 4, 8, 12, 16 ec.; ciò posto, l'integrale cercato sarà $\pm \frac{A}{a} \int \sqrt{xx + Ax + aa} \pm$

$\frac{B}{a} \int \sqrt{xx + Bx + aa} \pm \frac{C}{a} \int \sqrt{xx + Cx + aa}$ ec., presi

tali logaritmi nella logaritmica, di cui la sottangente sia $= a$, aggiungendo, o sottraendo da questo complesso di termini logaritmici (secondo che il segno del termine a^m nel denominatore sarà quello del più, o quello del meno) il doppio della somma di tanti archi di circolo,

colo, quanti sono i valori A, B, C ec., de' quali archi i raggi sieno per ordine $\sqrt{aa - \frac{1}{4}AA}, \sqrt{aa - \frac{1}{4}BB}, \sqrt{aa - \frac{1}{4}CC}$ ec., le tangenti sieno col medesimo ordine $x + \frac{1}{2}A, x + \frac{1}{2}B, x + \frac{1}{2}C$ ec. Tale sarà l'integrale della formola $\frac{ma^m dx}{x^m + a^m}$, se m sarà numero pari affermativo;

ma se nella medesima formola m sarà numero dispari affermativo, converrà aggiungere al tutto il logaritmo di $x + a$, perchè il denominatore à anche la radice reale $x + a$. E se la formola sarà $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$, essen-

do m numero dispari affermativo, converrà in luogo del logaritmo di $x + a$, aggiungere quello di $x - a$. E se finalmente, essendo la formola $\frac{ma^m dx}{x^m - a^m}$, farà m nu-

mero pari affermativo, converrà aggiungere il logaritmo di $x - a$, e sottrarre quello di $x + a$, prendendo sempre anche questi logaritmi nella logaritmica della sottangente $= a$.

51. Ma se nella proposta formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$, il numero m fosse intero negativo, cioè se fosse $\frac{dx}{x^{-m} \pm a^{-m}}$,

essa

essa si esprima così $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$, la quale ridotta al co-

$$\frac{\frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{a^m}}{x^m \pm a^m}$$

mune denominatore equivale a questa $\frac{a^m x^m dx}{a^m \pm x^m}$, e di-

videndo il numeratore per lo denominatore, acciò la massima potestà dell' incognita sia minore in quello, che in questo, si averà finalmente $\pm a^m dx \pm \frac{a^{2m} dx}{x^m \pm a^m}$,

in cui m sarà numero positivo, ed averanno luogo le cose dette di sopra anche quando nella formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$

sia m numero negativo intero.

52. Se in oltre la frazione $\frac{dx}{x^m \pm a^m}$ s'intenderà

moltiplicata per x^n , essendo n intero affermativo, o negativo, risoluto il denominatore ne' suoi efficienti reali, ne' quali x non ecceda la seconda dimensione, sarà essa il caso da me sopra considerato ai num. 41., e 42., e però riducibile alle quadrature del circolo, e dell' iperbola.

53. Ma quando n sia negativo, si potrà più speditamente ridurre così. Sia in primo luogo n minore di m : la formola $\frac{dx}{x^m \pm a^m} \times x^n$ si esprima coll'equi-

$$\frac{dx}{x^m \pm a^m} \times x^n$$

valen-

valente $\frac{dx}{a^m x^n} = \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times x^m + a^m} ; e \frac{dx}{x^m - a^m \times x^n}$ con

la $\frac{-dx}{a^m x^n} + \frac{x^{m-n} dx}{a^m \times x^m - a^m}$. Sia in secondo luogo

n maggiore di m , la formola $\frac{dx}{x^m + a^m \times x^n}$ si esprima

con l'equivalente $\frac{dx}{a^m x^n} = \frac{dx}{a^{2m} x^{n-m}} + \frac{dx}{a^{3m} x^{n-2m}} -$

$\frac{dx}{a^{4m} x^{n-3m}}$ ec. fino a quel termine, in cui l'esponen-

te di x sia prossimamente maggiore di m , $\pm$ (secondo, che porterà l'alternativa de' segni) $\frac{dx}{x^m + a^m \times a^r x^r}$,

dove r è lo stesso esponente della quantità a nel termine antecedente, e la r è il residuo della divisione fatta del numero n per lo numero m quante volte si può.

E se fosse $\frac{dx}{x^m - a^m \times x^n}$, supposto pure n maggio-

re di m , tutti i termini della serie dovranno essere affetti dal segno negativo, ed il termine fuori della serie, cioè il termine $\frac{dx}{x^m - a^m \times a^r x^r}$ dovrà avere sempre

prefisso il segno affermativo. Data adunque la formo-

la

la $\frac{dx}{x' + a' \times x'}$, farà essa = $\frac{dx}{a' x'}$ — $\frac{dx}{x' + a' \times a' x x}$;

ma sappiamo, che $\frac{-dx}{x' + a' \times a' x x} = \frac{-dx}{a' x x} + \frac{x dx}{a' \times x' + a'}$,

adunque farà $\frac{dx}{x' + a' \times x'} = \frac{dx}{a' x'}$ — $\frac{dx}{a' x x}$ + $\frac{x dx}{a' \times x' + a'}$,

quantità tutte, che si fanno maneggiare con le date regole.

54. Ma se m farà numero rotto affermativo, o negativo, chiamisi t il numeratore della frazione, che è eguale ad m , ridotta che questa sia ai termini semplicissimi, e p il denominatore della medesima; talchè la formola data sia espressa per $\frac{dx}{x^{\frac{t}{p}} \pm a^{\frac{t}{p}}}$;

ponga $x = y^p$, ed $a = b^p$, e la formola si convertirà in $\frac{p y^{p-1} dy}{y^t \pm b^t}$, che non à esponenti rotti, onde si può risolvere per le date regole.

Sia adunque, per esempio, la formola $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \pm a^{\frac{1}{2}}}$;

pongo $x = y y$, $a = b b$, farà $dx = 2y dy$, e fatte le sostituzioni, la formola sarà mutata in $\frac{2y dy}{y^1 \pm b^1}$, che non

à esponenti rotti.

55. Se poi fosse data la formola $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$, in

cui m , ed n fossero numeri rotti, chiamando r il numeratore della frazione n , e p il denominatore di quella, e così chiamando t il numeratore della frazione m , e q il denominatore della medesima (intendendo, che tali frazioni sieno ridotte a' termini semplicissimi) la

formola sarà $\frac{x^{\frac{r}{p}} dx}{x^{\frac{t}{q}} \pm a^{\frac{t}{q}}}$, in cui r , p , q , t faranno nu-

meri interi positivi, o negativi.

Pongasi ora $x = y^{pq}$, ed $a = b^{pq}$, la formola si convertirà in $\frac{pqy^{q-1} + pq-1 dy}{y^{pt} \pm b^{pt}}$, che non à frazioni negli es-

ponenti. Sia per esempio la formola $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{x^{\frac{4}{5}} \pm a^{\frac{4}{5}}}$; pon-

go $x = y^{10}$, $a = b^{10}$, sarà $dx = 10y^9 dy$, $x^{\frac{3}{2}} = y^{15}$, $x^{\frac{4}{5}} = y^8$, e fatte le sostituzioni, sarà mutata la formola in $\frac{10y^{14} dy}{y^8 \pm b^8}$, che non à esponenti rotti.

56. Finalmente se sarà $\frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$, essendo n , m ,

k

ed

ed u numeri intieri positivi, si potrà sempre averne l'integrale, supposte le sole quadrature del circolo, e dell'iperbola, e l'integrale sarà composto di quantità algebriche, e di una quantità sommatoria, il che si farà nel seguente modo.

$$\text{Si supponga la formola } \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m} =$$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.}}{x^m \pm a^m}^{u-1}$$

fino al termine costante, cioè fino a quello in cui l'esponente di x sia zero, e sia quello K , indi si aggiunga

$$A \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}, \text{ cioè si faccia } \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m} =$$

$$\frac{Bx^{n+um-2m+1} + Cx^{n+um-2m} + Dx^{n+um-2m-1} \text{ ec.} + K}{x^m \pm a^m}^{u-1}$$

$$+ A \int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}.$$

Si differenzj l'equazione, e si riduca al zero, e si ordinino i termini; dal paragone de' primi al zero troverassi il valore dell'assunta B ; dal paragone de' secondi al zero troverassi il valore dell'assunta C ; e così di mano in mano il valore dell'altre, i quali valori sostituiti in luogo delle majuscole, comechè la somma-

toria

toria $\int \frac{x^n dx}{x^m \pm a^m}$ dipende dalle sole quadrature del cir-
 colo, e dell'iperbola, e gl'altri termini nell'omogeneo
 di comparazione sono algebratici, così la proposta for-
 mula non esigerà quadrature superiori.

57. Alle volte potrà occorrere, che alcuno de'
 coefficienti B, C, D ec. si trovi arbitrario, ma solo
 allora quando sia n maggiore di $m-1$. E si noti pu-
 re, che ogni qual volta sia $m=n+1$, il coefficiente A
 si troverà eguale al zero, ed in conseguenza algebratico
 l'integrale della proposta formola.

58. Ma se nella proposta formola differenziale
 l'esponente, n fosse intiero negativo, di modo, che essa
 fosse $\frac{dx}{x^n}$, in cui ora è positivo, l'integrale sa-

$$x^n \times \frac{1}{x^m \pm a^m}^u$$

rebbe $Bx^{um-2m} + Cx^{um-2m-1} + Dx^{um-2m-2}$ ec. + $K +$

$$\frac{x^{n-1} \times \frac{1}{x^m \pm a^m}^{u-1}}$$

$A \int \frac{dx}{x^n \times \frac{1}{x^m \pm a^m}}$ i quali coefficienti B, C, D ec. si

determineranno nello stesso modo, come sopra.

Sia adunque per esempio $\frac{x dx}{x^2 + a^2}$; in questo ca-

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2 + a^2}^2$$

k 2

fo

fo si $n=1$, $m=3$, $u=2$. Sarà pertanto

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{Bxx + Cx + K}{x^3 + a^3} + A \int \frac{x dx}{x^3 + a^3}, \text{ e differenziando,}$$

$$\frac{x dx}{x^3 + a^3} =$$

$$\frac{2Bxx + Cdx \times x^3 + a^3 - 3xxdx \times Bxx + Cx + K + Axdx}{x^3 + a^3} \times \frac{1}{x^3 + a^3}$$

e riducendo al comun denominatore, ordinando l'equazione, e paragonandola al zero, farà

$$\begin{aligned} 2Bx^4 dx + Cx^3 dx - 3Kxxdx + 2Ba^1 xdx + Ca^1 dx \\ - 3Bx^4 dx - 3Cx^3 dx + Aa^1 xdx = 0, \\ + Ax^4 dx - xdx \end{aligned}$$

e però dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini, troveremo $A-B=0$, cioè $B=A$, $C=0$, $K=0$, $2Ba^1 + Aa^1 - 1=0$, cioè $Aa^1=1-2Ba^1$, e ponendo A in luogo di B , farà $A=\frac{1}{3a^1}=B$, onde finalmente

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{xx}{3a^1 \times x^3 + a^3} + \frac{1}{3a^1} \int \frac{x dx}{x^3 + a^3}$$

$$\text{Ma } \int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{1}{3aa} \times \int \sqrt{xx - ax + aa} - \int \frac{x}{x+a}$$

con di più $\frac{2}{3aa}$ moltiplicato nell'arco di circolo del raggio

gio

gio $\sqrt{\frac{3aa}{4}}$, tangente $= x - \frac{a}{2}$; adunque sarà

$$\int \frac{x dx}{x^3 + a^3} = \frac{xx}{3a^3 \times x^3 + a^3} + \frac{1}{9a^3} \int \sqrt{xx - ax + aa} -$$

$$\frac{1}{9a^3} \int \sqrt{x+a} + \frac{2}{9a^3} \times \text{arco di circolo del raggio} =$$

$\sqrt{\frac{3aa}{4}}$, tangente $= x - \frac{a}{2}$, presi i logaritmi nella logaritmica della sottangente $= a$.

59. Ma se l'esponente m fosse negativo, si trasformi la formola in altra equivalente, in cui l'esponente sia positivo nel modo indicato al num. 51.

60. E se ambi m , ed n fossero rotti, si facciano le sostituzioni del numero 55.

61. Se poi l'esponente u non fosse numero intero, ma rotto affermativo o negativo, basterà, che la formola sia uno de' casi considerati al numero 39. acciocchè si trasformi in un'altra capace d'essere maneggiata colle date regole.

Anzi la formola $\frac{x^u dx}{x^m \pm a^m}$, essendo gl'esponenti

n , m , u numeri interi positivi, o negativi, ed anche in qualunque modo rotti razionali, co' segni del più, o del meno a piacere, sarà integrabile, o almeno riducibile.

ducibile alle note quadrature, ogni qualvolta i detti esponenti abbiano tra loro tal proporzione, che una delle due quantità da essi composte, cioè $u - \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$,

o pure $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$ sia eguale ad un numero qualun-

que intero. Se questo numero intero sarà positivo, la formola s'integrerà algebricamente, salvi que' casi, ne' quali s'insinui la potestà $x^{-1} dx$, che obbliga a' logaritmi. Se questo numero intero sarà negativo, la formola si ridurrà alle quadrature del circolo, o dell'iperbola.

Per conseguire l'intento rispetto al primo caso di $u - \frac{1}{m} - \frac{n}{m} - 1$ eguale a numero intero, si faccia.

$$x^m + a^m = zx^m; \text{ dunque } x^m = \frac{a^m}{z-1}, \quad x = \frac{a}{z-1^{\frac{1}{m}}},$$

$$x^n = \frac{a^n}{z-1^{\frac{n}{m}}}, \quad x^{n+1} = \frac{a^{n+1}}{z-1^{\frac{1+n}{m}}}, \quad \text{e però}$$

$$x^n dx = - \frac{a^{n+1}}{m} dz \times \frac{1}{z-1^{\frac{1+n}{m}}}; \text{ ma } x^m + a^m =$$

$$zx^m = \frac{a^m z}{z-1}, \text{ ed } x^m + a^m = \frac{a^m z^n}{z-1^n}, \text{ dunque fatte le}$$

dovute

dovute sostituzioni nella proposta formola, sarà essa.

$$-\frac{a^{n+1} - m^u z - n dz}{z - 1} \times \frac{1 - \frac{n-1}{m} - 1 + u}{m}, \text{ la quale}$$

manifestamente si vede, essere integrabile algebricamente (salva l'eccezione fatta) quando sia $-\frac{n-1}{m} - 1 + u$

eguale a numero positivo intero. Che se sia $-\frac{n-1}{m} - 1 + u$ numero intero, ma negativo, per le

cose dette ne' superiori paragrafi, la sommatoria della formola non dipenderà da quadrature più alte di quelle del circolo, e dell'iperbola.

Vengo al secondo caso, cioè di $\frac{1}{m} - 1 + \frac{n}{m}$ eguale a numero intero; si faccia $x^m + a^m = z$, sarà dunque

$$x^m = z - a^m, \quad x = z - a^m \frac{1}{m}, \quad x^n = z - a^m \frac{n}{m}, \quad x^{n+1} = z - a^m \frac{n+1}{m}, \quad x^n dx = \frac{dz}{m} \times \frac{n+1}{m} - 1; \text{ ma}$$

$x^m + a^m = z$, ed $x^m + a^m = z^u$, dunque fatte le sostituzioni nella proposta formola, sarà essa

$$\frac{dz}{z} \times \frac{1 - \frac{n-1}{m} - 1 + u}{z^u}, \text{ o sia } \frac{z^{-u} dz}{z - a^m} \times \frac{n+1}{m} - 1,$$

la quale è integrabile algebricamente (salva la suddet-
ta

ta eccezione) quando sia $\frac{n+1}{m} - 1$ eguale a numero

positivo intiero , e quando sia eguale a numero negativo intiero , la sommatoria dipenderà dalle note quadrature del circolo , e dell' iperbola , per i superiori paragrafi .

62. Che se il denominatore della proposta frazione elevato a qualunque potestà intiera non fosse un binomio , come si è fin' ora considerato , ma fosse qualunque altro , purchè egli sia riducibile ne' suoi componenti reali , ne' quali la incognita non ecceda la seconda dimensione , o per mezzo delle equazioni convertibili , o in altro modo , si potrà sempre ridurre la formola alle note quadrature .

Imperciocchè sia per esempio $\frac{dx}{\frac{xx + bx + aa}{x + c}}$;

fatta attualmente la potestà del denominatore , si finga un' equazione così , $\frac{dx}{\frac{xx + bx + aa}{x + c}}$ +

$\frac{Ax^3 dx + Bxx dx + Cx dx + D dx}{x^4 + 2bx^3 + 2aaxx + b^2xx + 2abx + a^2}$ +
 $\frac{Fxx dx + Gx dx + H dx}{x^3 + 3cxx + 3ccx + c^2}$, ponendo generalmente tanti

termini , quanti sono i componenti del denominatore , ed in essi termini tante majuscole , quanta è la massima potestà

potestà dell'incognita nel denominatore rispettivo, moltiplicando in oltre in ogni termine la prima majuscola per la massima potestà meno uno della incognita del suo denominatore, la seconda majuscola per essa potestà meno due, e così di mano in mano sino all'ultima costante. Con la solita maniera si devono determinare esse costanti assunte, ed il primo termine somministrerà

tante frazioni divise per $xx + bx + aa$, nel qual denominatore fatto sparire il termine di mezzo, le frazioni saranno un caso particolare del Canone generale $\frac{x^m dx}{x^n \pm a^n}$, ed il secondo termine ci darà tante frazioni divise per $x + c$, che si riducono alla regola ordinaria dei denominatori composti di radici eguali.

63. Se in oltre il numeratore della proposta formola sarà moltiplicato per una potestà positiva, o negativa dell'incognita, ritrovati i valori delle majuscole, operando come se la frazione non fosse moltiplicata per essa potestà, i termini risultanti si moltiplichino per la stessa potestà, ed il rimanente si faccia al solito ec.

64. Finisco questo primo Capo con soddisfare alla promessa fatta al Lettore intorno al *Metodo de' Polinomj* del Sig. Conte Jacopo Riccati, che è il seguente.

Col nome di Polinomj differenziali appello le frazioni, che hanno per numeratore la flussione dx , e per

denominatore un aggregato di potestà, gl' esponenti delle quali costituiscano una progressione aritmetica, che va a terminarsi nel nulla. E mentre questa condizione non si adempia, bisognerà supplire qualche termine affetto dal coefficiente = 0. Abbiassi la espressione

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + a}$$

sembra a prima vista un trinomio, ma realmente è un quadrinomio, e va esposta così

$$\frac{dx}{x^{\frac{3}{6}} + x^{\frac{2}{6}} + 0x^{\frac{1}{6}} + a}$$

In qualunque Polinomio esposto per una frazione, il di cui denominatore sia alzato alla potestà p , numero intero e positivo, àssi un metodo, che sarebbe generale, se non venisse frequentemente reso inutile dalle quantità immaginarie, ed oltre ciò alcuni artifizj particolari, che tal volta opportunamente ci soccorrono.

Do principio dal trinomio $\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = dy$,

conciosiacchè a cotale espressione ogni trinomio facilmente si riduce. Facciassi $x^m = z + A$. (E' z una nuova variabile assunta, ed A una costante da determinarsi) Istituiti i necessarij computi per giungere alla sostituzione, abbiamo come segue

$$x^{2m} = zz + 2Az + AA$$

$$ax^m = az + aA$$

$$b = b$$

e per conseguenza

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{dz + A dz}{zz + 2Az + AA + az + aA + b}$$

Dec

Dee farsi in maniera, che spariscano le quantità $AA + aA + b$, ponendole $= 0$, e ne' casi, in cui A non è quantità immaginaria, succede ottimamente la riduzione. E giacchè $x^m = z + A$, e prese le differenze, $mx^{m-1} dx = dz$,

$$\text{ed } x = z + A^{\frac{1}{m}}, \text{ dunque } dx = \frac{dz}{mx^{m-1}} = \frac{dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}}}.$$

In passando alle necessarie sostituzioni, onde nella nostra formola principale in cambio di x , e delle sue funzioni resti surrogata la variabile assunta z colle sue funzioni, troveremo

$$\frac{dx}{x^{1m} + ax^{m-1} + b} = \frac{dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}} \times z + zA + a \times z},$$

e liberando la quantità z , che moltiplica il binomio $z + zA + a$ sotto il segno, sarà

$$\frac{dx}{x^{1m} + ax^{m-1} + b} = \frac{z^{-p} dz}{m \times z + A^{\frac{m-1}{m}} \times z + zA + a}.$$

Il caso più semplice vuole l'esponente p eguale all'unità, essendo l'altro m qualsivoglia numero intero, o rotto, affermativo, o negativo; e fatto per brevità $zA + a = g$, l'espressione generale passa nella particolare

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times z + A^{\frac{m-1}{m}} + z \times z + A^{\frac{m-1}{m}}} = mdy.$$

Istituisco una prima divisione, partendo cioè il numeratore della frazione per lo suo denominatore, ed il primo

1 2

qua-

quoziente sarà $\frac{z^{-1} dz}{g \times \frac{m-1}{m}}$, e fatta la moltiplicazione ;

e la sottrazione, conforme la pratica ordinaria, il residuo sarà $-\frac{dz}{g}$, da esser partito per lo denominatore, e perciò

$$\frac{\frac{z^{-1} dz}{g \times \frac{m-1}{m}}}{\frac{g \times \frac{m-1}{m} + z \times \frac{m-1}{m}}{dz}} = \frac{\frac{z^{-1} dz}{g \times \frac{m-1}{m}}}{\frac{g \times \frac{m-1}{m} + g z \times \frac{m-1}{m}}$$

Il primo termine del secondo membro è già ridotto alle quadrature note, e l'altro termine facilmente vi si riduce, ponendo $z + A = u$, e fatte le debite sostituzioni,

$$\text{avremo } \frac{-dz}{\frac{g \times \frac{m-1}{m} + g z \times \frac{m-1}{m}}{g g - g A + g^2}} = \frac{u^{-\frac{m+1}{m}} du}{g g - g A + g^2}$$

Seguitando la nostra ricerca, sia l'esponente p eguale a qualsivoglia numero positivo, ed intero: per ottenere l'intento basterà prolungare alquanto l'operazione. Ripigliata per mano la formola generale

$$\frac{dx}{x^{2m} + ax^m + b} = \frac{z^{-p} dz}{m \times \frac{m-1}{m} \times z + g}$$

e posto, per esempio, $p = 1$ al binario, si ridurrà alla seguente

$$\frac{z^{-1} dz}{g \times \frac{m-1}{m} + 2gz \times \frac{m-1}{m} + zz \times \frac{m-1}{m}} = mdy.$$

Di-

Divido, come sopra, il numeratore di queste frazioni per lo suo denominatore, ed il primo quoziente sarà

$\frac{z^{-2} dz}{g}$, e dopo le necessarie operazioni avremo

$$gg \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}}$$

il residuo $-\frac{2z^{-1} dz}{g} - \frac{dz}{gg}$ da essere nuovamente per

l'intero denominatore diviso. Istituisco una seconda divisione nella frazione

$$\frac{-2z^{-1} dz}{g}$$

$$g^1 \times \frac{z^{-1} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} + 2ggz \times \frac{z^{-1} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} + gzz \times \frac{z^{-1} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}}$$

e dopo le debite operazioni si averà il residuo $\frac{4dz}{g} + \frac{2zdz}{gg}$

da partirsi per l'intero denominatore. Nascerà pertanto la seguente equazione

$$\frac{z^{-2} dz}{g} = \frac{\frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} \times \frac{z^{-2} dz}{z + g}}{g^1 \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} + 2ggz \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} + gzz \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}}}$$

$$\frac{z^{-2} dz}{g} - \frac{2z^{-1} dz}{g} +$$

$$gg \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} \quad g^1 \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$\frac{4g-1 \times dz}{g} + \frac{2zdz}{g}$$

$$gg \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} \times \frac{z^{-2} dz}{z + g} \quad gg \times \frac{z^{-2} dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}}} \times \frac{z^{-2} dz}{z + g}$$

I primi due termini nell'omogeneo di comparazione sono due binomj, e gli altri due possono facilmente ridursi alla forma del binomio, facendo $z + A = u$, ovvero $z + g = u$. Ne' casi più compolli, in cui si mette $p=3, 4, 5$ cc.

5 cc. cresce il tedio del calcolo, ma il metodo non ci abbandona.

Esso metodo si estende a tutti i polinomj in infinito, mentre p sia numero intiero, e positivo; perchè se fosse negativo, ed intiero, la cosa riesce talmente facile, che non occorre favellarne. Per applicare il metodo altro non si richiede, che replicare la sostituzione $x = z + A$, $z = x + B$, facendo sempre svanire que' termini, ne quali le sole quantità costanti si ritrovano; laonde, per cagion d'esempio, si riduca il quadrimio al trinomio, e questo al binomio. In oltre è d'uopo di valersi di tempo in tempo d'una dimezzata divisione, perchè non abbiano a turbarci gli esponenti negativi, che bene spesso ci si presentano nel numeratore della frazione. Fra tanto il modo d'operare si mostra più spedatamente cogli esempi, che coi precetti.

Sia il quadrimio $\frac{dx}{x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c} = dy$. Le

costanti a, b possono essere $= 0$. Pongo $x^m = z + A$, ed avrassi

$$x^{3m} + ax^{2m} + bx^m + c = z^3 + 3Azz + 3AAz + A^3 + azz + 2aAz + aAA + bz + Ab + c.$$

Faccio $A^3 + aAA + Ab + c = 0$, e così determino il valore della costante assunta A . Quindi ripetute le operazioni, come nel trinomio, trovo

$$\frac{z^{-p} dz}{z + A} \times \frac{m-1}{m} \times \frac{1}{zz + gz + b^p}$$

Le spezie g, b sono costanti surrogate in luogo d'altre più composte; e stante, che p è un numero positivo, ed intiero, alzo il trinomio $zz + gz + b$ alla potestà p . Dopo

Dopo ciò intraprendo tante divisioni, quante sieno bastanti, per fare, che laddove nel numeratore ci sia l'esponente negativo, nel denominatore non si rinvenga altra

quantità, che il binomio $z + A^{\frac{m-1}{m}}$, e metto da parte sì fatte frazioni, che, trascurati i coefficienti, faranno analoghe alla seguente $z^{-n} dz$, posto n qualsivoglia numero po-

sitivo, ed intero. Gli altri termini sono rappresentati dalla formola generale

$$\frac{z^n dz}{z + A^{\frac{m-1}{m}} \times \sqrt[n]{zx + gz + b^p}}$$

Ripeto dunque l'operazione, facendo $z = u + B$, indi fatto sparire l'ultimo termine, conforme il solito, ed alzato il binomio $u + B$ alla potestà qualunque $n + 1$, e surrogati in cambio di z , e delle sue funzioni, i valori esposti per la nuova indeterminata u , tutti i membri compariranno sotto l'aspetto espresso dalla seguente formola

$$\frac{u^{n-p} du}{u + A + B^{\frac{m-1}{m}} \times \sqrt[n]{u + k^p}}$$

Quando sia p maggiore di n , onde l'esponente $n - p$ sia negativo, si mettano in pratica le divisioni, e la formola indi nascente sarà $u^{-n} du$; essendo poi $n - p$

$$\frac{u^{n-p} du}{u + A + B^{\frac{m-1}{m}}}$$

positivo, avremo $u^n du$; e finalmente

$$\frac{u^{n-p} du}{u + A + B^{\frac{m-1}{m}} \times \sqrt[n]{u + k^p}}$$

ponendo $u + k = \omega$, ed essendo tanto n , quanto p numeri interi, saranno sempre riducibili alle quadrature più semplici i binomj, che nasceranno dalle accennate operazioni.

Egli è vero, che a cagione delle immaginarie il metodo riesce limitato; ma oltrechè bene spesso le radici, o tutte, o in parte sono reali; oltrechè in molti casi particolari possono scansarsi le quantità immaginarie, non bisogna trascurare quel molto, che si può avere, perchè il tutto non può conseguirsi.

Abbiasi per esempio il trinomio $\frac{dx}{x + 2\sqrt{x} + 2}$.

Faccio $x^{\frac{1}{2}} = z + A$, dunque $x + 2\sqrt{x} + 2 = zz + 2Az + 2z + AA + 2A + 2$. Mettendo $AA + 2A + 2 = 0$, trovo $A = \sqrt{-1} - 1$; ed ecco in campo una grandezza mista di reale, ed immaginario, e procedendo a norma del metodo avremo $\frac{z - p dz}{z + A} = \frac{z - p dz}{z + 2\sqrt{-1}} + \frac{Az - p dz}{z + 2\sqrt{-1}}$.

Perchè si tolgano di mezzo le immaginarie, mutiamo maniera, e nella grandezza $zz + 2A + 2 \times z + AA + 2A + 2$ facciamo, che si dilegui il termine di mezzo $2Az + 2z$, ponendolo $= 0$, onde sia $A = -1$, e di più $AA + 2A + 2 = 1$, e la formola farà, come segue

$$\frac{dz}{z - 1} = \frac{z dz}{zz + 1} - \frac{dz}{zz + 1}; \text{ e ne' due}$$

binomj dell'omogeneo di comparazione, che sono equivalenti agl' altri due già considerati, non s'incontra difficoltà.

CAPO

C A P O I I.

Delle Regole dell'Integrazioni facendo uso delle Serie.

65. **F**Acendo ora passaggio all'altra maniera, d'integrare nel principio indicata, cioè col mezzo delle serie, è necessario di premettere le seguenti Regole.

Regola I. Ridurre una frazione a serie infinita.

Si divida il numeratore per lo denominatore con la regola ordinaria della divisione, ed il rimanente di nuovo si divida, e così di mano in mano in infinito, e si avrà una serie d'infiniti termini eguale alla proposta frazione. Si avverta però di porre tanto nel numeratore, quanto nel denominatore della frazione proposta, per primo termine quello, che farà il maggiore. Con questo modo operando averemo per tanto

$$\frac{f}{m+n} = \frac{f}{m} - \frac{fn}{mn} + \frac{fnn}{m^2} - \frac{fn^2}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} \text{ cc.}$$

$$\frac{f}{m-n} = \frac{f}{m} + \frac{fn}{mn} + \frac{fnn}{m^2} + \frac{fn^2}{m^3} + \frac{fn^3}{m^4} \text{ cc.}$$

$$\frac{af}{mn \pm nn} = \frac{af}{mn} \mp \frac{afnn}{m^2} + \frac{afn^2}{m^3} \mp \frac{afn^3}{m^4} + \frac{afn^4}{m^5} \text{ cc.}$$

cioè coi segni alternativi, quando il secondo termine

m

del

del denominatore sia positivo; e tutti positivi, quando sia col segno negativo.

Similmente farà

$$\frac{f}{mn \pm mn} = \frac{f}{mn} \mp \frac{fn}{m^2} + \frac{fnn}{m^3} \mp \frac{fn^2}{m^4} + \frac{fn^3}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{1 \mp xx} = 1 - xx + x^2 - x^3 + x^4 \text{ ec.}$$

$$\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m \mp n} = \frac{f}{mn} \pm \frac{2fn}{m^2} + \frac{3fnn}{m^3} \pm \frac{4fn^2}{m^4} + \frac{5fn^3}{m^5} \text{ ec.}$$

$$\frac{f}{m \mp n} = \frac{f}{m^2} \pm \frac{3fn}{m^3} + \frac{6fnn}{m^4} \pm \frac{10fn^2}{m^5} + \frac{15fn^3}{m^6} \text{ ec.}$$

Sia una frazione, il di cui numeratore, e denominatore sieno due serie infinite, e sia per esempio

$$1 + \frac{1}{2} axx - \frac{1}{8} aax^2 + \frac{1}{16} a^2 x^3 - \frac{5}{128} a^3 x^4 \text{ ec.}$$

$$1 - \frac{1}{2} bxx - \frac{1}{8} bbx^2 - \frac{1}{16} b^2 x^3 - \frac{5}{128} b^3 x^4 \text{ ec.}$$

$$\text{farà essa} = 1 + \frac{1}{2} bxx + \frac{3}{8} bbx^2 + \frac{5}{16} b^2 x^3 + \frac{35}{128} b^3 x^4 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{2} axx + \frac{1}{4} abx^2 + \frac{3}{16} abbx^3 + \frac{5}{32} ab^2 x^4 \text{ ec.}$$

$$- \frac{1}{8} aax^2 - \frac{1}{16} aabx^3 - \frac{3}{64} aabbx^4 \text{ ec.}$$

$$+ \frac{1}{16} a^2 x^3 + \frac{1}{32} a^2 bx^4 \text{ ec.}$$

$$- \frac{5}{128} a^3 x^4 \text{ ec.}$$

in cui $P + PQ$ è la quantità data, $\frac{m}{n}$ è l'esponente nu-

merico, P rappresenta il primo termine, Q il rimanente di tutti gl'altri termini divisi per il primo, e ciascuna delle lettere A, B, C, D ec. significano rispettivamente il termine anteriore di modo, che per A s'intenda $P \frac{m}{n}$, per B s'intenda $\frac{m}{n} A Q$, per C s'intenda $\frac{m-n}{2n} B Q$ ec.

Sia da ridursi in serie la formola $\sqrt{aa + xx}$, adunque sarà $P = aa$, $Q = \frac{xx}{aa}$, $m = 1$, $n = 2$, e però

$$\sqrt{aa + xx} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ ec.}$$

Sia $\sqrt[5]{a^5 + a^4x - x^5}$, cioè $a^5 + a^4x - x^5 \frac{1}{5}$, farà $P = a^5$, $Q = \frac{a^4x - x^5}{a^5}$, $m = 1$, $n = 5$, e però

$$\frac{a^5 + a^4x - x^5}{5a^5} = a + \frac{a^4x - x^5}{5a^4} - \frac{2a^3xx + 4a^4x^6 - 2x^{10}}{25a^9} \text{ ec.}$$

Sia $\frac{b}{\sqrt[3]{y^3 - aay}}$, cioè $b \times y^3 - aay^{-\frac{1}{3}}$, farà

$$P = y^3, \quad Q = -\frac{aay}{yy}, \quad m = -1, \quad n = 3, \quad \text{e però}$$

rd

LIBRO III. F

Abbiafi da elevare u
da elevarfi alla potestà m

$$y + ayy + by^1 + cy^2 + fy^3$$

$$y^m + \frac{may^{m+1}}{1} + \frac{m \times m}{1 \times 2}$$

$$+ \frac{m \times by^m}{1}$$



$$\text{rò } b \times y^3 - aay^{-\frac{1}{3}} = \frac{b}{y} + \frac{aab}{3y^4} + \frac{2a^2b}{9y^7} + \frac{14a^4b}{81y^7} \text{ cc.}$$

Se fosse $\frac{b}{\sqrt[5]{a+x}}$, si esprimerebbe così $b \times \overline{a+x}^{-\frac{1}{5}}$,

ed il rimanente si farebbe, come sopra.

Sia $\frac{b}{\overline{a+x}^3}$, cioè $b \times \overline{a+x}^{-3}$, farà $P=a$, $Q=\frac{x}{a}$,

$$m=-3, n=1, \text{ e però } b \times \overline{a+x}^{-3} = \frac{b}{a^3} - \frac{3bx}{a^4} +$$

$$\frac{6bxx}{a^5} - \frac{10bx^3}{a^6} \text{ cc.}$$

68. Abbiafi, da elevare una quantità complessa, ad una data potestà, e sia per esempio $a+x$ da elevarfi alla potestà m , cioè $\overline{a+x}^m$. Sarà $P=a$, $Q=\frac{x}{a}$,

$$m=m, n=1, \text{ onde } \overline{a+x}^m = a^m + \frac{ma^{m-1}x}{1} +$$

$$\frac{m \times m-1 \times a^{m-2}xx}{1 \times 2} + \frac{m \times m-1 \times m-2 \times a^{m-3}x^3}{1 \times 2 \times 3} \text{ cc.}$$

Abbiafi cc.

69. Ciò posto : Sia da integrarsi la formola differenziale $\frac{b dx}{a+x}$. Ridotta in serie la frazione $\frac{b}{a+x}$, e

moltiplicato ciascun numeratore per dx , avremo

$$\frac{b dx}{a+x} = \frac{b dx}{a} - \frac{b x dx}{a^2} + \frac{b x^2 dx}{a^3} - \frac{b x^3 dx}{a^4} + \frac{b x^4 dx}{a^5} \text{ ec. ,}$$

ed integrando

$$\int \frac{b dx}{a+x} = \frac{b x}{a} - \frac{b x^2}{2 a^2} + \frac{b x^3}{3 a^3} - \frac{b x^4}{4 a^4} + \frac{b x^5}{5 a^5} \text{ ec.}$$

70. Sia la formola $\frac{a dx}{x}$. Fatta $x=b+z$, intendendo per la b una qualunque costante a piacere, e per z una nuova incognita, sarà $\frac{a dx}{x} = \frac{a dz}{b+z}$.

Ridotta in serie la frazione $\frac{a}{b+z}$, e moltiplicato

ciascun numeratore per dz , sarà

$$\frac{a dz}{b+z} = \frac{a dz}{b} - \frac{a z dz}{b^2} + \frac{a z^2 dz}{b^3} - \frac{a z^3 dz}{b^4} + \frac{a z^4 dz}{b^5} \text{ ec. ,}$$

ed integrando $\int \frac{a dz}{b+z} = \frac{a z}{b} - \frac{a z^2}{2 b^2} + \frac{a z^3}{3 b^3} - \frac{a z^4}{4 b^4} +$

$$\frac{a z^5}{5 b^5} \text{ ec. , cioè } \int \frac{a dx}{x} = \frac{a \times \overline{x-b}}{b} - \frac{a \times \overline{x-b}^2}{2 b^2} +$$

$$\frac{a \times \overline{x-b}^3}{3 b^3} - \frac{a \times \overline{x-b}^4}{4 b^4} \text{ ec.}$$

71. Sia la formola $\frac{b dx}{\sqrt[5]{x+a}}$; ridotta in serie.

$$\sqrt[5]{\frac{b dx}{x+a}}$$

$$\text{sarà } \frac{b dx}{\sqrt[5]{x+a}} = b dx - \frac{3b x dx}{5a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12b x^2 dx}{25a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52b x^3 dx}{125a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.,}$$

e però integrando sarà

$$\int \frac{b dx}{\sqrt[5]{x+a}} = \frac{bx}{a^{\frac{1}{5}}} - \frac{3bx^2}{10a^{\frac{8}{5}}} + \frac{12bx^3}{75a^{\frac{13}{5}}} - \frac{52bx^4}{500a^{\frac{18}{5}}} \text{ ec.}$$

E così si faccia di qualunque altra proposta formola.

72. Se le serie così ritrovate, che esprimono l'integrale delle proposte formole differenziali, e comprendono un numero infinito di termini, saranno di valore infinito, sarà infinito l'integrale delle proposte formole differenziali. E se esse serie saranno di valore finito, e di più sommabili, cioè a dire, che si sappia ritrovare il valore di esse serie, quantunque composte di termini infiniti di numero, il che molte volte succede, si avrà in quantità finite, e però algebriche l'integrale delle proposte formole differenziali. Ma se le serie essendo di valore finito non saranno sommabili, quanti più termini nella serie si prenderanno, tanto più si accollerà al giusto l'integrale della proposta formola differenziale, ma l'esatto però verrà espresso da tutta la serie.

73. Per riconoscere, quali sieno le serie di valore infinito, quali di valore finito, e quali sommabili, si
veda

veda il trattato *De Seriebus Infinitis* del Sig. Giacomo Bernulli , ed altri Autori , che di esse trattano .

74. Ma qualunque volta la formola differenziale sia composta di due soli termini , si può generalmente , e più speditamente far uso del seguente Canone , in cui gl'esponenti m , n , r possono essere intieri , rotti , positivi , e negativi , ed il quale si può produrre a quanti termini si vuole , giacchè da' quattro posti , abbastanza si manifesta la legge , con cui si forma .



CAPO

$$\frac{-mn + 2n}{t + 2n} \times \frac{t + mn + 3n}{t + 3n} \times y^{t+1} \text{ ec.} \times \overline{b + cy^n}^{m+1}.$$

2, D, E ec. sono costanti arbitrarie da determinarsi.

$$\overline{+m+1} \times ncy^{n-1} dy \times \overline{b + cy^n}^m \times \overline{Ay^t + By^{t+n} + Cy^{t+2n} \text{ ec.}}$$

, allora i termini tutti del canone farebbero positivi.
 zero la quantità $t + mn + 3n$, ed in conseguenza farà

$$\frac{+24a^1bx - 16a^1xx}{105b^1x^{\frac{7}{2}}} \times \overline{b + x^{\frac{3}{2}}}.$$



indi

C A P O I I I.

Dell' uso delle accennate Regole nelle Rettificazioni delle Curve , Quadrature de' Spazj , Appianazioni delle Superficie , e Cubature de' Solidi .

75. **P**ER fare uso delle sopraccennate regole di calcolo integrale , applicandole alle quadrature de' spazj , rettificazioni di curve , appianazioni , o sia quadrature di superficie , e cubature de' solidi , sia una qualunque curva ADH (Fig. 6.) riferita all' asse AB con le ordinate parallele fra loro , ed in angolo retto sopra l' asse stesso . Alla ordinata BD condotta CH parallela , ed infinitamente prossima , e tirata DE parallela a BC , il multilineo $BDHC$ farà la flussione , o il differenziale , o sia l' elemento dello spazio ABD , e perchè lo spazio DEH è nullo rispetto al rettangolo $BDEC$, si potrà prendere esso rettangolo per l' elemento del suddetto spazio ABD . Adunque la somma di tutti questi rettangoli infinitesimi $BDEC$ farà lo spazio compreso dalla curva AD , e dalle coordinate AB , BD . Quindi chiamata $AB=x$, $BD=y$, farà $BC=dx$, $EH=dy$, ed il rettangolo $BDEC=ydx$ farà la formola per gli spazj . Se adunque in questa formola sostituiremo in luogo di y il valore dato per x , e per le co-

n

stanti

stanti dell'equazione della curva, o in luogo di dx , il valore dato per y , dy , e le costanti, ed indi integreremo, sarà l'integrale il ricercato spazio ABD .

Altre espressioni, o formole possono averfi degli elementi de' spazj per mezzo di Settori, o di Trapezj, le quali in certi incontri sogliono essere più comode della riferita; se ne vedrà la maniera, e l'uso in alcuni esempj.

76. Che se la curva sarà riferita al fuoco, o sia ad un punto fisso, per esempio M , da cui partano tutte le ordinate; condotta all'ordinata MD la infinitamente prossima MH , lo spazio infinitesimo MHD sarà l'elemento dello spazio AMD ; onde, perchè descritto col centro M , raggio MD , l'archetto infinitesimo DK , lo spazietto DKH è nullo rispetto allo spazio MDK , e perchè altresì l'archetto DK si può assumere per la tangente in D , o in K , ne viene, che lo spazio MDK sarà l'elemento dello spazio AMD .

Chiamata per tanto $MD=y$, $KD=dz$, sarà ydz

la formola generale degli spazj per le curve riferite al fuoco. E se in questa formola si sostituirà in luogo di y , o di dz il rispettivo valore dato dall'equazione della curva, l'integrale sarà lo spazio ricercato, cioè lo spazio AMD .

77. Ma se la curva sarà riferita ad un diametro, cioè se le coordinate non faranno tra loro in angolo retto, condotta (Fig. 7.) HG perpendicolare ad AG , il prodotto di HG , o sia di FG in BC sarà il piccolo parallelogrammo $BCED$, ed in conseguenza l'elemento dell'area ABD . E perchè essendo dato l'angolo DBG , è data la ragione del seno tutto al seno retto, che sia per esempio quella di m ad n , fatta al solito $AB = x$, $BD = y$, sarà HG , o sia $FG = \frac{ny}{m}$, ed il parallelogrammo $BCED$ sarà $\frac{nydx}{m}$, formola generale dello spazio.

78. Egli è chiaro, che la somma di tutte le porzioni infinitesime DH della curva formano la curva stessa, e però, che DH ne sarà l'elemento, adunque chiamata (Fig. 6.) $AB = x$, $BD = y$, e però $BC = dx$, $EH = dy$, nelle curve riferite all'asse, cioè con le coordinate in angolo retto, sarà $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, formola generale per la rettificazione di esse curve.

79. Rispetto alle curve riferite al fuoco, fatta pure $MD = y$, $KD = dz$, sarà illessamente la formola generale $\sqrt{dy^2 + dz^2}$.

80. Ma intorno alle curve con le coordinate in angolo obliquo, (Fig. 7.) essendo dato l'angolo HCG , è data la ragione del seno tutto al seno del comple-

mento, che sia quella di m , ad e , onde sarà $CG = \frac{ey}{m}$,
 ed $EF = \frac{edy}{m}$, e però $DH = \sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{2edxdy}{m}$.

81. Sostituito in ciascuna di queste formole, in luogo di dy , o di dx , o di dz , il rispettivo valore dato per l'altra variabile, e suoi differenziali dalla equazione della curva, ed indi fatte le integrazioni, avremo la ricercata lunghezza della curva AD .

82. S'intenda moverfi il piano AHC (Fig.^a 6.) attorno alla retta AC , la curva AH descriverà una superficie nel mentre, che il piano AHC descriverà un solido; ma la porzione infinitesima DH descriverà una zona infinitesima, che sarà l'elemento della superficie descritta dalla curva AH , ed il piano infinitesimo $DBCH$ descriverà un solido pure infinitesimo, che sarà l'elemento del solido descritto dal piano AHC . Ora intorno alle curve riferite all'asse colle coordinate, in angolo retto; sia la ragione del raggio alla circonferenza del circolo quella di r alla c , la circonferenza descritta col raggio $BD = y$ sarà $\frac{cy}{r}$, e però $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$

l'espressione della zona infinitesima, ed in conseguenza la formola generale per le superficie.

83. Sarà pure $\frac{cyy}{2r}$ l'area del circolo col rag-

gio

gio $BD = y$, e però $\frac{cyydx}{2r}$ sarà l'espressione del cilin-

dretto infinitesimo descritto dal rettangolo $BCED$, ma esso non differisce, se non per quantità infinitesima del secondo ordine, dal solido generato dal piano $BCHD$; adunque sarà $\frac{cyydx}{2r}$ la formola generale per i solidi.

84. Ma rispetto al caso della Fig. 7., cioè quando le coordinate sono tra loro nel dato angolo obbliquo, il raggio del circolo, sopra cui insiste la piccola zona, ed il piccol cilindro, non è $CH = y$, ma bensì $GH = \frac{ny}{m}$, siccome l'elemento DH , che forma la zo-

na, non è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ma $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$, e

l'altezza del picciol cilindro non è $BC = dx$, ma $FD = dx + \frac{edy}{m}$; adunque la formola della superficie in

questo caso sarà $\frac{cny}{rm} \sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$.

85. Il prodotto del circolo col raggio GH nell'altezza FD , cioè $\frac{cnmy}{2rmm} \times \frac{dx + edy}{m}$, è l'elemento del

solido generato dal piano AGH ; adunque da questo sottraendo l'elemento del solido generato dal triangolo HCG , cioè $\frac{cnmy}{2rmm} \times \frac{edy}{m}$, il rimanente sarà l'elemento

del

del solido generato dal piano ABD , e però sarà $cnnnydx$ la formola generale per essi solidi.

27mm

86. Per le curve riferite al fuoco, come che è variabile l'angolo DMB (Fig. 6.), e per conseguenza non si può avere il valore della BD , o CH , raggio del circolo, che necessariamente entra nella formola delle quadrature della superficie, e cubature del solido, fa d'uopo dall'equazione riferita al fuoco cavare l'equazione della stessa curva riferita all'asse, ed indi procedere colla solita maniera già spiegata; avvertendo, che nelle cubature bisognerà dagl'integrali sottrarre il cono generato dal triangolo MHC , per avere il solido generato dal piano AMD .

87. La maniera di cavare dall'equazione differenziale di una curva al fuoco l'equazione della stessa curva all'asse è la seguente.

La curva ADH (Fig. 6.) si consideri nel tempo stesso relativamente al fuoco M , ed all'asse AMB , egli è certo, che il quadrato HD dell'elemento della curva è eguale tanto ai due quadrati DK , KH , quanto agl'altri due DE , EH , e che di più il quadrato di MD è eguale ai due quadrati MB , BD . Chiamando $MB=x$, $BD=y$, $MD=z$, e l'arco minimo $DK=du$, avremo $dz^2 + du^2 = dx^2 + dy^2$, ed $xx + yy = zz$.

Ora l'equazione della curva al fuoco venga espressa
general-

generalmente dalla formola $p dz = du$, in cui p è una data funzione di z , e farà $dz^2 + p^2 dz^2 = dx^2 + dy^2$, e collocando in vece di dy il suo valore nascente dall'equazione $xx + yy = zz$, vale a dire $\frac{z dz - x dx}{\sqrt{zz - xx}}$, troveremo

mo $dz^2 + p p dz^2 = dx^2 + \frac{z dz - x dx}{zz - xx}^2$, la quale si riduce alla

seguente $p p dz^2 \times \frac{zz - xx}{zz - xx} = z z dx^2 - 2 x z dx dz + x x dz^2$, ed estrarra la radice quadrata, $p dz = \frac{z dx - x dz}{\sqrt{zz - xx}}$.

E' d'uopo espurgare nuovamente la premessa equazione liberandola dalla mistura delle incognite, col porre $x = \frac{z q}{b}$, e però $dx = z dq + q dz$. Fatta svanire, col mezzo dell'equazione sussidiaria assunta, la x , e le sue funzioni, avremo $\frac{p dz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$.

Nell'equazione $\frac{p dz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$ se tale sarà il valore

di p dato per z , che la quantità $\frac{p dz}{z}$ con le debite so-

stituzioni possa ridursi alla differenziale d'un'arco di circolo, e che fatte le necessarie sommatorie, i due archi circolari si rispondano, come numero a numero, allora la curva sarà algebrica, e troveremo la sua equazione

all'

all'asse con una formola alla Cartesiana. In ogn'altro caso la curva sarà trascendente.

ESEMPIO.

Sia l'equazione di una curva al fuoco $\frac{zdz}{\sqrt{cc-1bz-zz}} = du$.

Avremo in tal caso $p = \frac{z}{\sqrt{cc-1bz-zz}}$, e nell'equazione

$\frac{p dz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$, sostituito il valore di p ; sarà essa

$\frac{dz}{\sqrt{cc-1bz-zz}} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$. Pongo $b+z=t$, dunque

$bb+1bz+zz=tt$, e $bb-tt=-1bz-zz$, onde fatta la sostituzione, sarà $\frac{dt}{\sqrt{cc+bb-tt}} = \frac{dq}{\sqrt{bb-qq}}$.

Sia per un caso $cc+bb=bb$, in tale supposto sarà $t=q$, cioè $b+z=q=\frac{bx}{z}$, dunque $bz+zz=bx$, e ponendo in luogo di z il suo valore, sarà l'equazione della curva $b\sqrt{xx+yy}+xx+yy=bx$, il che ec.

88. Il Canone assegnato c'insegna la maniera ancora di passare dall'equazione differenziale di una curva all'asse a quella del fuoco nel modo, che segue.

ESEM-

ESEMPIO I.

Si cerchi l'equazione al fuoco in un circolo, preso il fuoco in un punto della sua circonferenza A .

Sia (Fig. 8.) $AH = b$, $AG = x$, $AC = z = \sqrt{bx}$.
 Richiamisi a memoria la formola $\frac{pdz}{z} = \frac{dq}{\sqrt{bb - qq}}$,

ove si è preso $q = \frac{bx}{z}$; poichè per l'equazione locale del circolo è $bx = zz$, farà $q = z$, sicchè fatta svanire la q , sostituendo il suo valore z , farà $\frac{pdz}{z} = \frac{dz}{\sqrt{bb - zz}}$,

o sia $p = \frac{z}{\sqrt{bb - zz}}$; nella formola adunque $pdz = du$ se

in cambio di p sostituirassi il valore ritrovato, farà $\frac{zdz}{\sqrt{bb - zz}} = du$, equazione del circolo al fuoco preso nel punto A .

ESEMPIO II.

89. Si cerchi l'equazione delle sezioni coniche, riferite al loro umbilico M . (Fig. 6.)

Chiamata $MB = x$, $BD = y$, l'equazione generale,

le, che abbraccia tutte le sezioni del cono; sarà

$a \pm \frac{cx}{b} = \sqrt{xx + yy}$, cioè: alla parabola col paramet-

tro $2a$, quando $c = b$; all'ellissi coll'asse trasverso

$= \frac{2abb}{bb - cc}$, col conjugato $= \frac{2ab}{\sqrt{bb - cc}}$, distanza del fuo-

co dal vertice $= \frac{ab}{b + c}$, se b sia maggiore di c ; all'

iperbola coll'asse trasverso $= \frac{2abb}{cc - bb}$, col conjugato

$= \frac{2ab}{\sqrt{cc - bb}}$, distanza del vertice dall'umbilico $= \frac{ab}{b + c}$,

se b sia minore di c ; se $c = 0$, sarà al circolo col dia-

metro $= 2a$. Ma $\sqrt{xx + yy} = z$, dunque $a \pm \frac{cx}{b} = z$,

ed in oltre, $bx = zq$, dunque $a \pm \frac{czq}{bb} = z$, ovvero

$\pm \frac{bb}{c} \mp \frac{abb}{cz} = q$, e differenziando $\pm \frac{abcbdz}{ccz} = dq$, e

$qq = \frac{bbbb}{cc} - \frac{2abbb}{ccz} + \frac{aabb}{ccz}$, ed $bb - qq = bb -$

$\frac{bbbb}{cc} + \frac{2abbb}{ccz} - \frac{aabb}{ccz}$, avremo dunque

$\frac{dq}{\sqrt{bb - qq}} = \frac{\pm cbabdz}{cz\sqrt{bbccz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - a^2bbbb}} = p dz$,

dunque $p = \frac{\pm abb}{\sqrt{bbccz - bbb^2z^2 + 2abbb^2z - aabb}}$, ed

essendo

essendo

essendo $p dz = du$, avremo l'equazione cercata

$$\pm abbdz = du. \text{ Il segno}$$

$$\sqrt{bbcczz - bbbhzz + 2abbbhz - aabbbb}$$

negativo serve, quando le assisse si prendono dal fuoco verso il vertice, il positivo al contrario ec.

90. Dissi doverfi ridurre l'equazione della curva al fuoco ad un'altra riferita all'asse, non perchè ciò sia necessario assolutamente per le compianazioni delle superficie, e per le cubature de' solidi, mentre tutto questo si può ottenere per mezzo del noto Teorema, cioè, che *La periferia della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa periferia è eguale alla superficie del solido, che dalla rotazione viene generato; e l'area della curva moltiplicata nel viaggio del centro di gravità d'essa area è eguale al solido accennato*; ma qui non si suppone il Lettore informato di essi centri di gravità.

Ora per avere una sufficiente idea delle curve riferite al fuoco, mi faccio ad indagare la loro costruzione. Sia una di quelle BCD , (Fig. 9.) le coordinate infinitamente prossime AC , AE , che partono dal punto A , si chiamino z , la loro differenza $FE = dz$, e l'archetto minimo CF descritto col centro A sia $= du$. La natura della curva venga generalmente espressa dall'equazione differenziale $p dz = du$, in cui la p è data in qualsivoglia modo per z . Si noti pertanto, che il

primo membro pdz , avendo le variabili z , che tutte prendono origine dal polo A , è integrabile o algebricamente, o trascendentemente; ma l'altro membro du , senza incorrere in paralogismo, non può sommarfi, non essendo egli già la flussione dell' arco u , perchè esso elemento du cresce, o cala in doppio senso, cioè ed in se stesso, e coll' aumentarsi o diminuirsi dell' ordinate AC , AE . Per procedere adunque aggiustatamente, col raggio arbitrario $AI = r$ si descriva il circolo IGH , e sia nella periferia determinato un punto qualunque I , da cui si prendano come da punto fisso gl' archi crescenti IG , IH ; e prorogate, se occorre, le variabili AC , AE sino in G , ed H , faranno simili i settori ACF , AGH , e però z , $du :: r$, GH ; che si chiami dq , dunque $\frac{z dq}{r} = du$; ma per l'equazio-

ne generale della curva è $pdz = du$, dunque $\frac{z dq}{r} = pdz$,

e però $\frac{r pdz}{z} = dq$; quindi sommando, sarà $\int \frac{r pdz}{z} = q = IG$.

Le costanti aggiunte, o levate nell'integrare altro non farebbero, che diversificare il sito del punto I .

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia da costruirsi la spirale logaritmica, la di cui equazione è $\frac{adz}{b} = du$; ma $du = \frac{z dq}{r}$, dunque $\frac{adz}{b} = \frac{z dq}{r}$; o pure, perchè il raggio AI è assunto ad arbitrio, fatta $b = r$, e presa a come unità, $\frac{dz}{z} = dq$, ed integrando, $lz = q$, la di cui effezione geometrica è trascendente, ma semplicissima.

ESEMPIO II.

Sia la spirale iperbolica della sottangente costante $= a$, e però l'equazione $\frac{adz}{z} = du$; ma $du = \frac{z dq}{r}$, dunque $\frac{ardz}{zz} = dq$, e sommando sarà $b - \frac{ar}{z} = q$ ec.

In tali costruzioni si à sempre l'arco IG di circolo, che forma l'omogeneo di comparazione, l'altro membro $\int \frac{r p dz}{z}$ può essere integrabile analiticamente, come nel secondo esempio, o trascendentemente per via della quadratura dell'iperbola, come nel primo, o per qualunque altra più composta. Quindi in un solo caso le nostre curve possono esser algebriche, cioè quan-

do la quantità $\int \frac{rpdz}{z}$ possa ridursi alla rettificazione

d'un arco di cerchio, che al corrispondente IG sia, come numero a numero. Se la proporzione fosse per avventura forda, allora la curva $BCE D$ sarà bensì meccanica, ma non già dipendente dal tetragonismo del cerchio, riducendosi ad un problema diverso consistente nel dividere gl'archi circolari in qualunque data ragione, il che può ottenersi per mezzo dell'Elice o sia Spirale d'Archimede, o della Quadratrice di Dinostrato.

Le soprastrate cose ci somministrano un'altro modo di far passaggio dalle espressioni delle curve al fuoco a quelle, che si riferiscono all'asse, o al contrario. Giacchè $\frac{rpdz}{z} = dq = \frac{rrdt}{rr+tt}$, chiamata la tangente $IK = t$

(num. 26.), sarà essa tangente t data analiticamente, o trascendentemente per z , ma $AI = r$, $AK = \sqrt{rr+tt}$,

$AM = x$, $MC = y$, dunque $\frac{rz}{x} = \sqrt{rr+tt}$, e dopo

le debite riduzioni, $r \sqrt{zz - xx} = t = \frac{ry}{x}$, ma t è dato

per z , e $z = \sqrt{xx + yy}$, dunque siamo arrivati alla curva locale all'asse, che tosto si riduce alle solite coordinate x, y . Tornando indietro per la stessa strada si passa dalle equazioni all'asse a quelle al fuoco.

Ripi-

Ripiglio l'esempio del num. 87., cioè la curva

$zdz = du$ riferita al fuoco, per riferirla all'

$$\sqrt{cc - 2bz - zz}$$

asse. Poichè si è presa $p dz = du$ per equazione generale delle curve riferite al fuoco, sarà in questo caso particolare $p = \frac{z}{\sqrt{cc - 2bz - zz}}$, onde, surrogato questo

$$\sqrt{cc - 2bz - zz}$$

valore in luogo di p nell'equazione $\frac{r p dz}{z} = dq = \frac{r r dt}{rr + tt}$,

farà $\frac{r dz}{\sqrt{cc - 2bz - zz}} = \frac{r r dt}{rr + tt}$. Faccio $b + z = s$, $dz = ds$,

$bb + 2bz + zz = ss$, onde $-2bz - zz = bb - ss$, e sostituiti questi valori, sarà $\frac{r ds}{\sqrt{cc + bb - ss}} = \frac{r r dt}{rr + tt}$, cioè

fatta $cc + bb = bb$, $\frac{r ds}{\sqrt{bb - ss}}$, o sia $\frac{r b ds}{b \sqrt{bb - ss}} = \frac{r r dt}{rr + tt}$;

ma l'integrale del primo membro è un'arco di cerchio, di cui sia b il raggio, ed s il seno del complemento, (num. 37.) moltiplicato nella frazione costante r , e l'integrale del secondo è un'arco di cerchio del

raggio r , tangente t ; dunque il primo arco sarà al secondo, come b ad r , cioè saranno tra loro, come i raggi, dunque sono simili, dunque nella stessa ragione de' raggi sono pure le tangenti; e perchè la tangente

del

del primo arco è $\frac{b}{t} \sqrt{bb - ss}$, sarà $\frac{b}{t} \sqrt{bb - ss}$, $r :: b$,
 r , cioè $t = \frac{r}{b} \sqrt{bb - ss}$, quindi restituito il valore di
 s , e posto $\frac{ry}{x}$ in luogo di t , si avrà

$$\frac{ry}{x} = \frac{r \sqrt{bb - bb - 2bz - zz}}{b + z}, \text{ equazione ridotta all'asse,}$$

la quale si esprimerà con le sole coordinate x, y ,
 ponendo in luogo di zz il valore $xx + yy$, e sarà $by +$

$$y \sqrt{xx + yy} = x \sqrt{bb - bb - 2b \sqrt{xx + yy} - xx - yy},$$

che è la stessa della ritrovata al citato num. 87.

Per passare dall'equazioni all'asse a quelle del fuoco,
 prendo l'Esempio I. del num. 88. la di cui equazione
 al circolo è $z = \sqrt{bx}$ (Fig. 8.).

La tangente data per z dell'arco OQ descritto col
 centro A , raggio r , si trova essere $\frac{r \sqrt{bb - zz}}{z} = t$;

dunque nell'equazione canonica $dq = \frac{r r dt}{rr + t^2}$ sostituiti in

luogo di t , e di dt i rispettivi valori, avremo
 $-dq = -\frac{r dx}{\sqrt{bb - zz}}$; pongo $-dq$, perchè crescen-

do AC , (z) cala l'arco OQ (q); ma $dq = \frac{r du}{z}$, quin-

di

di $\frac{rdu}{z} = \frac{rdz}{\sqrt{bb-zz}}$, cioè $\frac{zdz}{\sqrt{bb-zz}} = du$, che è la stessa

la equazione della ritrovata al num. 88.

91. Nè meno sono necessarie le particolari formole, che si sono ritrovate nel caso delle curve con le coordinate in angolo obbliquo tra loro, perchè tali equazioni possono sempre mutarsi in altre, che abbiano le coordinate in angolo retto, ed indi poi si potrà servirsi delle solite formole.

Ed in fatti si chiami (Fig. 7.) $HG = p$, $AG = q$; è adunque $p = \frac{ny}{m}$, $q = x + \frac{ey}{m}$, denominando, come so-

pra, $AB = x$, $BD = y$, e la ragione del seno tutto al seno retto quella di m ad n , al seno del complemento quella di m ad e ; adunque sarà $y = \frac{mp}{n}$, $x = q -$

$\frac{ey}{m} = q - \frac{ep}{n}$. Sostituiti per tanto nella proposta equazio-

ne in luogo di x , ed y questi valori dati per p , e q , avrassi l'equazione della curva con le coordinate in angolo retto fra loro. Ma succederà bene spesso, che l'equazione primitiva sia semplice, e trasformandola si faccia assai composta; anzi, che essendo separate le incognite nella proposta, non lo sieno nella trasformata, il che è di maggiore difficoltà, nè possano separarsi con le solite regole di divisioni, estrazioni di radici ec.

P

Tut.

Tuttavia però in molti casi particolari non sarà forse mal fatto il mettere a prova, e l'una, e l'altra maniera per appigliarti a quella, che nel dato caso sarà più comoda.

Ma sarà opportuno venire agl' Esempj, ne' quali, quando non si avvivi in contrario, intenderassi sempre, che le coordinate siano fra loro in angolo retto.

Delle Quadrature de' Spazj.

ESEMPIO I.

92. Sia ABC (Fig. 10.) una parabola apolloniana dell'equazione $ax = yy$, una qualunque assissa $AD = x$, $DB = y$, e debbasi quadrare lo spazio ADB . Sarà dunque $y = \sqrt{ax}$, e posto questo valore nella formola generale de' spazj (ydx) in luogo di y , sarà essa $d x \sqrt{ax}$, ed integrando $\frac{2}{3} x \sqrt{ax} + b$. La quantità b è la solita costante, che nelle integrazioni devesi aggiungere, e che ora fa d'uopo di determinare. Nel punto A , cioè quando $x = 0$, lo spazio è zero, adunque l'integrale $\frac{2}{3} x \sqrt{ax} + b$, che esprime questo spazio, deve pure essere zero, fatta $x = 0$, e però sarà $\frac{2}{3} 0 \sqrt{a0} + b = 0$, cioè $b = 0$; vale a dire, che in questo caso non devesi all'integrale aggiungere costante alcuna.

Adun-

Adunque sarà lo spazio $ABD = \frac{2}{3} x \sqrt{ax}$, ma $\sqrt{ax} = y$, onde $ABD = \frac{2}{3} xy$, cioè eguale a due terzi del rettangolo dell'affissa nell'ordinata.

Quindi se si volesse lo spazio chiuso da una fissa, e determinata affissa, ed ordinata, per esempio quando sia $x = 2a$; comechè, per l'equazione della curva, è in questo caso $y = \sqrt{2aa}$, sarà lo spazio $= \frac{4}{3} aa\sqrt{2}$. Se le affisse della parabola non principiafferò dal vertice A , ma da un dato punto D ; posta, per esempio $AD = a$, una qualunque $DE = x$, il parametro $= f$, sarà l'equazione $af + fx = yy$, ed $y = \sqrt{af + fx}$. Sostituito questo valore nella formola ydx , sarà essa $dx\sqrt{af + fx}$, ed integrando $\frac{2}{3} \times a + x\sqrt{af + fx} + b$ eguale allo spazio $DCEB$. Ma per determinare la costante b si rifletta, che nel punto D , cioè quando $x = 0$, lo spazio è eguale a zero, adunque nell'integrale fatta $x = 0$, dovrà essere $\frac{2}{3} a\sqrt{af} + b = 0$, e però la costante $b = -\frac{2a}{3}\sqrt{af}$; adunque per avere l'integrale compito, in luogo di aggiungere la b , bisognerà sottrarre $\frac{2}{3} a\sqrt{af}$, e però lo spazio ricercato $DCEB$ sarà $= \frac{2}{3} \times a + x\sqrt{af + fx} - \frac{2}{3} a\sqrt{af}$.

Sia $AE = a$, ed in E principj la x verso A , e sia

una qualunque $ED = x$, farà l'equazione $af - fx = yy$, ed $y = \sqrt{af - fx}$, onde $ydx = dx\sqrt{af - fx}$, ed integrando, farà $-\frac{2}{3}a - x \times \overline{af - fx}^{\frac{1}{2}} + b$. Ma quando $x = 0$, lo spazio pure è $= 0$, adunque fatta nell'integrale $x = 0$, dovrà essere $-\frac{2}{3}a\sqrt{af} + b = 0$, e però $b = \frac{2}{3}a\sqrt{af}$; adunque lo spazio $EDBC = \frac{2}{3}a\sqrt{af} - \frac{2}{3}x \times \overline{af - fx}^{\frac{1}{2}}$.

Si è veduto, che generalmente lo spazio AEC nella parabola è $= \frac{2}{3}AE \times EC$, così lo spazio $ADB = \frac{2}{3}AD \times DB$; adunque lo spazio $DECB$ farà $= \frac{2}{3}AE \times EC - \frac{2}{3}AD \times DB$, il che appunto confronta col calcolo dell'uno, e dell'altro caso dell'origine della x dal punto D verso E , e dal punto E verso D .

Prendo l'equazione generale a tutte le parabole

di qualunque grado $a^m x^n = y^r$, onde farà $y = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, e però la formola $ydx = a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} dx$, ed integrando, farà lo spazio $= \frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r} + b$, ma presa $x = 0$, si trova essere $b = 0$, adunque non va aggiunta costante alcuna, e l'integrale ritrovato $\frac{ra^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n+r}{r}}}{n+r}$ è compito, e po-

ponendo y in luogo di $a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}}$, farà $rx y =$ allo spazio
ricercato .

ESEMPIO II.

93. Sia la curva $y = \sqrt[m]{x+a}$, farà adunque
 $y dx = dx \sqrt[m]{x+a}$, ed integrando , farà lo spazio
 $\frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \times \overline{x+a}^{\frac{1}{m}} + b$.

Ma posta $x=0$, dovrà essere $b = -\frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$,
adunque l'integrale compito, cioè lo spazio ricercato
farà $= \frac{m}{m+1} \times \overline{x+a} \sqrt[m]{x+a} - \frac{m}{m+1} \times a \sqrt[m]{a}$.

ESEMPIO III.

94. Sia l'iperbola fra gl'asintoti FED , (Fig. 11.)
e sia $AB = x$, $BE = y$, e l'equazione $xy = aa$; farà
 $y = \frac{aa}{x}$, e però $y dx = \frac{aadx}{x}$, ed integrando, farà lo
spazio $= a l x + b$, preso il logaritmo nella logaritmi-

ca

ca della sortangente $= a$. Ma posta $x = 0$, il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, per la natura della logaritmica, adunque la quantità b da aggiungersi all'integrale deve essere quantità infinita, e positiva, e però infinito lo spazio compreso della curva EF prodotta in infinito, dall'asintoto, e dalle due coordinate AB , BE .

Sia l'iperboloide dell'equazione $a' = xyy$, farà $y = \sqrt{\frac{a'}{x}}$, e però $ydx = dx \sqrt{\frac{a'}{x}}$, ed integrando, farà lo spazio $= 2\sqrt{a'x} + b$, ma posta $x = 0$, è $b = 0$, adunque non fa d'uopo aggiungere costante alcuna, e l'integrale compito, cioè lo spazio $ABEF$ infinitamente prodotto all'insù, farà $2\sqrt{a'x}$, quantità finita, o sia, per l'equazione della curva, $= 2xy$.

Sia l'iperboloide dell'equazione $a' = xx y$; farà $y = \frac{a'}{xx}$, ed $ydx = \frac{a' dx}{xx}$, ed integrando farà lo spazio $= -\frac{a'}{x} + b$, ma posta $x = 0$, farà $\frac{a'}{0}$ quantità infinita, adunque b è eguale all'infinito, onde per avere l'integrale compito bisognerà aggiungere quantità infinita, e però sarà infinito lo spazio.

Sia generalmente l'equazione a tutte le iperboli-

di

di $a^{m+n} = x^m y^n$, farà $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$, e però $\int y dx =$
 $\frac{m a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}}}{m-n} + b$. Se $m = 1$, $n = 1$, cioè $xy = aa$,

avremo $\int y dx = \frac{aa}{0} + b$, quantità infinita, onde lo spazio infinito, come si è veduto di sopra :

Se $n = 1$, $m = 2$, cioè $a' = xyy$, farà $\int y dx =$
 $2 \sqrt{a' x} + b$; ma posta $x = 0$, farà pure $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio cercato $= 2 \sqrt{a' x} = 2xy$, per l'equazione della curva, e però finito, quantunque infinitamente prodotto all'insù dalla parte di F .

Se $n = 2$, $m = 1$, cioè $a' = xxy$, farà $\int y dx =$
 $-\frac{a'}{x} + b$, ma posta $x = 0$, farà $-\frac{a'}{0}$ infinito, e però $b =$ all'infinito, adunque si deve aggiungere all'integrale quantità infinita, e però lo spazio sarà infinito.

Se $n = 1$, $m = 3$; cioè $a' = xxy$, farà $\int y dx =$
 $\frac{3}{2} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b$; ma posta $x = 0$, farà $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, farà $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{a' x x} =$
 $= \frac{3}{2} xy$, quantità finita, quantunque infinitamente prodotta all'insù.

Se

Se $n = 3$, $m = 1$; cioè $a' = x'y$, farà $\int ydx = -\frac{a'}{2x^2} + b$; ma posta $x = 0$, è $b = \infty$, adunque lo spazio infinito.

Se $n = 1$, $m = 4$; cioè $a' = xy^4$, farà $\int ydx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{a'x^3} + b$; ma posta $x = 0$, farà $b = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio, farà $= \frac{4}{3} \sqrt[4]{a'x^3} = \frac{4}{3} xy$, quantità finita.

Se $n = 4$, $m = 1$; cioè $a' = x^4y$, farà $\int ydx = -\frac{a'}{3x^3} + b$; ma posta $x = 0$, farà b eguale all'infinito, adunque infinito lo spazio. Con la stessa maniera si potrà procedere quanto si vuole.

Prendansi ora le assisse dal punto B , e si cerchi lo spazio $BCDE$. Sia dunque $AB = b$, $BC = x$, $CD = y$, e sia la stessa iperbola apolloniana, la di cui equazione $by + xy = aa$; adunque farà $y = \frac{aa}{b+x}$, e però $ydx = \frac{aa dx}{b+x}$, ed integrando $\int ydx = a l \overline{b+x} + f$, preso il logaritmo nella logaritmica della sottangente $= a$.

Ma

Ma per determinare la costante f , posta $x = 0$, dovrà essere $f = -a/b$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $BCDE$ farà $a \int \frac{1}{b+x} - a/b$.

Se si prenda $BC = x$ infinita, farà infinito $\int \frac{1}{b+x}$; adunque lo spazio $EB CD$ infinitamente prodotto dalla parte di C è infinito.

Si prenda x negativa $= BA = -b$, farà a $\int \frac{1}{b+x}$ eguale ad a moltiplicato nel logaritmo del zero; ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, adunque in questo caso lo spazio è negativo, cioè dalla parte di M , ed è infinito, come si è veduto anche di sopra, e però lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti è infinito dall'una, e dall'altra parte infinitamente prodotto.

Sia l'iperboloide cubico dell'equazione $bxy + xyy = a^3$, farà $y = \sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, onde $ydx = dx \sqrt{\frac{a^3}{b+x}}$, ed integrando

$\int ydx = 2\sqrt{a^3b+a^3x} + f$, ma posta $x = 0$, farà $f = -2\sqrt{a^3b}$, adunque l'integrale compito, o sia lo spazio $EB CD$, farà $= 2\sqrt{a^3b+a^3x} - 2\sqrt{a^3b}$, quantità algebrica. Presa x infinita, farà infinito lo spazio $EB CD$ infinitamente prodotto dalla parte di C .

Preso x negativa $= BA = -b$, l'integrale farà $-2\sqrt{a^3b}$, adunque lo spazio farà negativo, cioè fa-

rà *FEBA*M, e sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *M*, come si è pure veduto di sopra.

Sia l'iperboloide dell'equazione $\sqrt{b+x} \times y = a$, sarà $y = \frac{a}{\sqrt{b+x}}$, onde $y dx = \frac{a dx}{\sqrt{b+x}}$. Ed integrando

$\int y dx = -\frac{a}{\sqrt{b+x}} + f$, ma posta $x = 0$, sarà $f = \frac{a}{b}$; adun-

que l'integrale compito, cioè lo spazio *EBCD* sarà = $\frac{a}{b} - \frac{a}{\sqrt{b+x}}$. Presa x infinita, il termine $-\frac{a}{\sqrt{b+x}}$ sarà

zero, adunque lo spazio sarà finito, quantunque infinitamente prodotto dalla parte di *C*. Sia x negativa = *BA* = $-b$, l'integrale sarà $\frac{a}{b} - \frac{a}{0}$, ma $-\frac{a}{0}$ è quan-

tità infinita, e negativa, adunque lo spazio sarà dalla parte di *M* infinito ec.

Con questo metodo operando troverassi, che lo spazio tra l'iperbola apolloniana, e gli asintoti infinitamente prodotto sarà infinito dall'una, e dall'altra parte; tra l'iperboloide primo cubico, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide secondo cubico, e gli asintoti sarà infinito dalla parte di *M*, e finito dalla parte di *C*; tra l'iperboloide primo del quarto grado, e gli asintoti sarà finito dalla parte di *M*, ed infinito dalla parte di *C*; tra

l'iper-

l'iperboloide secondo , e gli asintoti sarà finito dalla parte di C , ed infinito dalla parte di M ec.

Per porre in opera le serie , Prendo l'espressione dello spazio $BCDE$ della suddetta iperbola apolloniana, cioè $\frac{aaxdx}{b+x}$.

Ridotta questa in serie, sarà essa $= \frac{aaxdx}{b} - \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxx^2dx}{b^2} - \frac{aax^3dx}{b^3}$ ec., ed integrando $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^2}{3b^2} - \frac{aax^3}{4b^3}$ ec., la qual serie infinitamente prodot-

ta equivale appunto allo spazio $BCDE$, e se fosse sommabile, ci darebbe in termini finiti, cioè algebricamente lo spazio cercato, vale a dire la quadratura dell'iperbola, ma non essendo sommabile, quanti più termini di essa si prenderanno, principiando dal primo, tanto più ci avvicineremo al giusto valore dello spazio.

Prendo l'assissa BT dalla parte de' negativi, sarà l'equazione della curva $by - xy = ax$, e però $ydx = \frac{aaxdx}{b-x}$, e riducendo in serie, sarà

$ydx = \frac{aaxdx}{b} + \frac{aaxdx}{bb} + \frac{aaxx^2dx}{b^2} + \frac{aax^3dx}{b^3} + \frac{aax^4dx}{b^4}$ ec., ed integrando, $\int ydx = \frac{aax}{b} + \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^2}{3b^2} + \frac{aax^3}{4b^3} + \frac{aax^4}{5b^4}$ ec.

q 2

eguale

eguale allo spazio $BTPE$. Presa $BT = BA$, lo spazio $FEBAM$ infinitamente prodotto dalla parte di M sarà $= aa + \frac{aa}{2} + \frac{aa}{3} + \frac{aa}{4} + \frac{aa}{5}$ ec., serie di valore infinito; adunque lo spazio infinito.

ESEMPIO IV.

95. Fra gl'asintoti AS , AB (Fig. 12.) sia l'iperbola equilatera OC , e sia $AB = BC = a$, $BI = -x$. S'intenda descritta la curva meccanica BEF tale, che il rettangolo di AB in qualunque ordinata IE sia eguale al corrispondente spazio iperbolico $BCOI$. Si ricerca lo spazio indeterminato $SABEF$. Sia l'ordinata $IE = z$. Si è veduto, essere lo spazio $BCOI$ eguale alla serie $ax + \frac{xx}{2} + \frac{x^2}{3a} + \frac{x^3}{4aa} + \frac{x^4}{5a^3}$ ec., posta come

suppongo, $a = b$, adunque per la proprietà della curva, farà $z = x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^2}{3aa} + \frac{x^3}{4a^3}$ ec., e però $zdx =$

$x dx + \frac{xx dx}{2a} + \frac{x^2 dx}{3aa} + \frac{x^3 dx}{4a^3}$ ec.; ed integrando, farà finalmente lo spazio $BIE = \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6a} + \frac{x^4}{12aa} + \frac{x^5}{20a^3} + \frac{x^6}{30a^4}$ ec.,

e presa $x = a = BA$ rispetto a tutto lo spazio $SABEF$ infi-

nitamente prodotto, sarà esso $= \frac{aa}{2} + \frac{aa}{6} + \frac{aa}{12} + \frac{aa}{20} + \frac{aa}{30}$ ec.,

la qual serie è sommabile, ed è $= aa$, adunque è algebricamente quadrabile, ed eguale al quadrato di BA lo spazio infinitamente prodotto $SABEF$.

ESEMPIO V.

96. Sia l'iperbola ATC , (Fig. 13.) l'asse trasverso $DA = 2a$, il parametro $= p$, $EB = x$, $BC = y$, e però l'equazione $xx - aa = \frac{2a}{p}yy$, e si cerchi lo spazio ABC ;

sarà dunque $y = \sqrt{\frac{p}{2a}xx - paa}$, e però la formola

$$ydx = dx \sqrt{\frac{p}{2a}xx - paa}.$$

Fatto sparire il segno radicale, e passando all'integrazione, troverassi con le solite maniere l'integrale in parte algebrico, ed in parte logaritmico, adunque lo spazio ABC dell'iperbola dipende dalla descrizione della logaritmica..

Se si voglia lo spazio $ACHE$, lo spazietto infinitesimo $ITCH$, fatta MT infinitamente prossima a BC , ne sarà l'elemento, e però la formola sarà $x dy$, in cui sostituendo in luogo di x il valore dato per y dall'equazione, sarà $x dy = dy \sqrt{\frac{2a}{p}yy + aap}$, il di cui inte-

grale

grale isteffamente dipende dalla logaritmica :

E se tanto nella formola ydx del primo spazio ; quanto nella xdy del secondo si avesse sostituito in luogo di dx in quella , ed in luogo di dy in questa i rispettivi valori dati dall'equazione , si farebbero parimente ritrovati gl'integrali della stessa natura .

Per far uso delle serie . Prendo la formola dello spazio $ACHEA$, cioè xdy ; adunque $xdy =$

$$dy \sqrt{\frac{2a^2y + aap}{p}} , \text{ e facendo per maggiore facilità } 2a = p,$$

(giacchè le costanti non alterano il metodo) cioè supposta l'iperbola equilatera , sarà $xdy = dy \sqrt{yy + aa}$, e riducendo in serie il radicale , sarà

$$xdy = a dy + \frac{y^2 dy}{2a} - \frac{y^4 dy}{8a^3} + \frac{y^6 dy}{16a^5} - \frac{5y^8 dy}{128a^7} \text{ ec. , ed inte-}$$

$$\text{grando } \int xdy , \text{ cioè lo spazio } ACHFA = ay + \frac{y^3}{6a} -$$

$$\frac{y^5}{40a^3} + \frac{y^7}{7 \times 16a^5} - \frac{5y^9}{9 \times 128a^7} \text{ ec. , serie che non si sa}$$

formare . E sottraendo questa serie dal rettangolo xy , avrassi lo spazio ABC .

Si conducano dal centro E le infinitamente prossime ET , EC , e sia AKP tangente nel vertice . Col centro E si descrivano gli archetti di circolo KQ , TR ;

farà

farà $AK = \frac{ay}{x}$, e $KP = \frac{axdy - aydx}{xx}$, $ET = \sqrt{xx + yy}$,

$EK = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$, e per la similitudine de' triangoli

PKQ , KEA , o sia TEM , farà $KQ = \frac{axdy - aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$,

e per la similitudine de' settori EKQ , ETR , farà $TR = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però farà $\frac{1}{2} ET \times TR$, cioè $\frac{xdy - ydx}{2}$

l'elemento del settore ETA , e sostituendo in luogo di y ,
e dy il valore dato dall'equazione della curva $y = \sqrt{xx - aa}$,
(supposta equilatera l'iperbola) farà $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, ed in-

tegrando $\int \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, cioè il settore $ETA =$

$-\frac{1}{2} a \log x - \sqrt{xx - aa}$ nella logarithmica della tangente $= a$, il quale spazio è espresso da quantità negativa appunto, perchè si assume nel senso de' negativi.

Riducendo la formola in serie, troveremo $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}} =$

$$\frac{aa \cdot dx}{2x} + \frac{a^2 dx}{4x^3} + \frac{3a^4 dx}{16x^5} + \frac{5a^6 dx}{32x^7} + \frac{35a^{10} dx}{256x^9} \text{ ec.}$$

Ma per integrare il primo termine della serie farebbe

rebbe d'uopo ridurre prima quello ancora ad una serie infinita; adunque sarà meglio fare più speditamente nel seguente modo. Sia $EM = x$, $MT = y$, $AK = z$, farà $KP = dz$, e sia $KE = p$, $AE = a$, semiasse trasverso, il semiasse conjugato $= b$. Sarà adunque $KQ = \frac{adz}{p}$,

$$ET = \frac{px}{a}, \quad TR = \frac{xdz}{p}, \quad \text{e però } \frac{1}{2} ET \times TR = \frac{xxdz}{2a};$$

ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$,

e per i triangoli simili EAK , EMT , farà $y = \frac{xz}{a}$;

adunque $zx = b \sqrt{xx - aa}$, ed $xx = \frac{aabb}{bb - zz}$; e però

la formola farà $\frac{abbdz}{2 \times bb - zz}$, cioè ridotta in serie

$$\frac{az}{2} + \frac{azdz}{2bb} + \frac{az^3dz}{2b^3} + \frac{az^5dz}{2b^5} + \frac{az^7dz}{2b^7} \text{ cc., ed integrando;}$$

$$\int \frac{abbdz}{2 \times bb - zz}, \quad \text{cioè lo spazio } ETA = \frac{az}{2} + \frac{az^3}{6bb} +$$

$$\frac{az^5}{10b^4} + \frac{az^7}{14b^6} + \frac{az^9}{18b^8} \text{ cc.}$$

ESEMPIO VI.

97. Sia il circolo ABD (Fig. 14.) col diametro $AD = a$, e si cerchi l'area d'un qualunque mezzo segmento AHE . Fatta $AE = x$, $EH = y$, farà l'equazione $y = \sqrt{ax - xx}$, e però $y dx = dx \sqrt{ax - xx}$. Qui non occorre liberare la formola dalla radicale, o tentare altri modi, a fine di mutarla in un'altra capace d'essere integrata algebricamente, o per mezzo de' logarithmi, perchè farà fatica superflua, mentre ci ridurremo sempre ad una formola di quadratura, o rettificazione di circolo, come si è notato al num. 37., e però senz'altro potrá procedersi con le serie.

Risolta adunque in serie la formola, farà

$$dx \sqrt{ax - xx} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{16a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.,}$$

ed integrando $\int y dx$, cioè lo spazio $AEH =$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{72a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

Sia ora il raggio $CA = a$, e sia $CE = x$, $EH = y$,

r

c

e l'equazione $y = \sqrt{aa - xx}$; adunque $ydx = dx \sqrt{aa - xx}$,
e riducendo in serie, $ydx = adx - \frac{xxdx}{2a} - \frac{x^4dx}{8a^3} - \frac{x^6dx}{16a^5}$,

$\frac{5x^8dx}{128a^7}$ ec., ed integrando, $\int ydx$, cioè lo spazio

$$CEHB = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7} \text{ ec.},$$

e fatta $x = a$ rispetto a tutto il quadrante, $aa -$
 $\frac{aa}{6} - \frac{aa}{40} - \frac{aa}{112} - \frac{5aa}{1152}$ ec., ed il quadruplo di questa
serie farà l'area di tutto il circolo.

Per mezzo d'un settore. Sia $CA = a$, $AQ = x$,
e condotta CK infinitamente prossima alla CQ , farà
 $QK = dx$, $CQ = \sqrt{aa + xx}$, e descritto col centro C
l'archetto infinitesimo QS , per la similitudine de' trian-
goli KSQ , QAC , farà $QS = \frac{adx}{\sqrt{aa + xx}}$, e però $MN =$

$\frac{aadx}{aa + xx}$; adunque il picciolo settore CMN , elemento

del settore CAM , farà $= \frac{a^2 dx}{2 \times \sqrt{aa + xx}}$. Ridotto effo

per tanto in serie, farà $\frac{a^2 dx}{2 \times \sqrt{aa + xx}} = \frac{a^2 dx}{2aa} -$

$\frac{a^2 xx dx}{2a^4} + \frac{a^2 x^3 dx}{2a^6} - \frac{a^2 x^5 dx}{2a^8} + \frac{a^2 x^7 dx}{2a^{10}}$ ec., ed inte-
grando,

grando, sarà $\int \frac{a^3 dx}{2 \times \frac{aa+xx}{2}}$, cioè il settore $CMA =$

$$\frac{ax - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{10a^2} - \frac{x^5}{14a^4} + \frac{x^7}{18a^6} \text{ ec.}, \text{ e posto, che l'arco}$$

AM sia la metà del quadrante, cioè presa $x = a$, la serie sarà $\frac{aa}{2} - \frac{aa}{6} + \frac{aa}{10} - \frac{aa}{14} \text{ ec.}$; ed il doppio, cioè $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} - \frac{aa}{7} \text{ ec.}$ sarà il quadrante ABC .

Se in vece di prendere il raggio $CA = a$, l'avessi preso $= \sqrt{\frac{aa}{8}}$, farebbe il quadrante $ABC =$

$$\frac{aa}{8} - \frac{aa}{3 \times 8} + \frac{aa}{5 \times 8} - \frac{aa}{7 \times 8} \text{ ec.}, \text{ e sottraendo attual-$$

mente ciascun termine negativo dall'antecedente positivo, sarà $\frac{aa}{3} + \frac{aa}{35} + \frac{aa}{63} + \frac{aa}{155} \text{ ec.}$, che è la stessa serie

inferita dal Sig. Leibnizio negl'atti di Lipsia dell'anno 1682.

ESEMPIO VII.

98. Sia l'ellissi BCD , (Fig. 15.) il semiasse trasverso $AB = a$, il semiasse conjugato $AC = b$, $AE = x$, $EH = y$, onde l'equazione $\frac{bb}{aa} \times \frac{aa-xx}{2} = yy$, e pe-

rò $ydx = \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}$, elemento dell'area $A E H C$.

Ma $dx \sqrt{aa - xx}$ è formola di quadratura del circolo BOD , il di cui diametro sia l'asse trasverso dell'ellissi, adunque dalla quadratura del circolo dipenderà la quadratura dell'ellissi. E perchè $\int \frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx} = E H C A$,

e $\int dx \sqrt{aa - xx} = E M O A$; farà un qualunque spazio dell'ellissi al corrispondente spazio del circolo sul diametro DB , come b ad a , cioè come il semiasse conjugato al semiasse trasverso, ed in conseguenza lo spazio intero dell'ellissi a tutto lo spazio del circolo nella stessa ragione. Ma poichè i circoli sono tra loro, come i quadrati de' diametri, o sia de' raggi, se faremo un circolo, il di cui raggio sia $= \sqrt{ab}$, cioè medio proporzionale tra i due semiasse dell'ellissi BCD , farà questo circolo al circolo BOD , come ab , $aa :: b$, a , ma in questa medesima ragione è l'area dell'ellissi BCD allo stesso circolo BOD ; adunque l'area dell'ellissi sarà eguale all'area del circolo, il di cui raggio sia medio proporzionale fra i semiasse dell'ellissi.

Per mezzo della serie. Ridotta in serie la formola

$$\frac{bdx}{a} \sqrt{aa - xx}, \text{ farà essa } = \frac{bdx}{a} \times a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^3}{8a^3} - \frac{x^5}{16a^5} - \frac{5x^7}{128a^7} \text{ cc.,}$$

ed

ed integrando $\int \frac{b dx}{a} \sqrt{aa - xx}$, cioè l'area $ACHE =$

$$bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^3} - \frac{bx^7}{112a^5} - \frac{5bx^9}{1152a^7} \text{ ec.}, \text{ e fatta } x = a,$$

farà l'area ACB , quarta parte dell'ellissi, eguale ad $ab -$
 $\frac{ab}{6} - \frac{ab}{40} - \frac{ab}{112} - \frac{5ab}{1152} \text{ ec.},$

Nella stessa ellissi, preso un qualunque arco DS ;
 sia DP tangente in D , $AI = x$, $IS = y$, e per lo
 punto S condotta AP , le sia infinitamente prossima
 AK , che taglierà l'ellissi in T . Col centro A si de-
 scrivano gl'archetti di circolo KQ , TR ; farà dunque
 $AS = \sqrt{xx + yy} = AT$, $DP = \frac{ay}{x}$, $AK = AP = a\sqrt{xx + yy}$,

$KP = -\frac{axy + aydx}{xx}$, essendo PK differenza negativa;

e per la similitudine de' triangoli PQK , PAD , farà
 $KQ = -\frac{axy + aydx}{x\sqrt{xx + yy}}$, e per la similitudine de' settori

ATR , AKQ , farà $TS = -\frac{xdy + ydx}{\sqrt{xx + yy}}$, e però

$TR \times \frac{AT}{x}$, cioè $-\frac{xdy + ydx}{x\sqrt{xx + yy}}$ farà la formola per lo
 spazio ACT , la quale, sostituito in luogo di y , e di
 dy il valore dato dall'equazione della curva, farà final-
 mente $\frac{abdx}{2\sqrt{aa - xx}}$.

$$2\sqrt{aa - xx}$$

Ma

Ma $\int \frac{ax}{\sqrt{aa - xx}}$ è la rettificazione del circolo,

come si è veduto al num. 37., e come si vedrà in breve, adunque la quadratura de' settori ellittici dipende dalla rettificazione, o quadratura del circolo. Nè occorre affaticarsi per liberare la formola dal radicale, perchè, ciò non ostante, urteremo in un'altra dallo stesso circolo dipendente.

Per mezzo poi delle serie troveremo, essere

$$\frac{ab \cdot dx}{2 \sqrt{aa - xx}} = \frac{b \cdot dx}{2} + \frac{bx \cdot dx}{4aa} + \frac{3bx^3 \cdot dx}{16a^3} + \frac{5bx^5 \cdot dx}{32a^5} + \frac{35bx^7 \cdot dx}{256a^7} \text{ ec., ed integrando, avremo lo spazio } ADC =$$

$$\frac{bx}{2} + \frac{bx^3}{12aa} + \frac{3bx^5}{80a^3} + \frac{5bx^7}{224a^5} + \frac{35bx^9}{2304a^7} \text{ ec., e fatta } x = a$$

rispetto a tutto lo spazio ADC , quarta parte dello spazio intero dell'ellissi, sarà esso $= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{12} + \frac{3ab}{80} +$

$$\frac{5ab}{224} + \frac{35ab}{2304} \text{ ec.}$$

Che se avessi voluto liberare la formola dal segno radicale, facendo la sostituzione $\sqrt{aa - xx} = a - \frac{xz}{a}$, si sarebbe mutata in quest'altra $\frac{aabdz}{aa + zz}$, la quale ridotta in

serie

serie si trova essere $b dz - \frac{b z z dz}{a a} + \frac{b z^4 dz}{a^4} - \frac{b z^6 dz}{a^6} + \frac{b z^8 dz}{a^8}$ ec.,

ed integrando, $b z - \frac{b z^3}{3 a a} + \frac{b z^5}{5 a^4} - \frac{b z^7}{7 a^6} + \frac{b z^9}{9 a^8}$ ec., e posta

$x = a$, nel qual caso è pure $z = a$, sarà $ab - \frac{ab}{3} + \frac{ab}{5} -$

$\frac{ab}{7} + \frac{ab}{9}$ ec. rispetto al quadrante dell'ellissi.

E se si supponga $a = b$, l'ellissi passa ad essere un circolo del raggio $= a$, e la serie sarà $aa - \frac{aa}{3} + \frac{aa}{5} -$

$\frac{aa}{7} + \frac{aa}{9}$ ec. come al num. 97., che esprimerà il qua-

drante; e però da qui ancora si vede, che l'area dell'ellissi è all'area del circolo, il di cui diametro sia eguale all'asse trasverso dell'ellissi, come l'asse conjugato all'asse trasverso della stessa ellissi.

ESEMPIO VIII.

99. Sia la cicloide NAM , (Fig. 16.) il circolo generatore ARH , e sia $AH = a$, $AB = x$, $BC = dx$, $BE = y$, $DF = dy$, sarà l'equazione $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$

$\frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$. Ma lo spazietto $QEPF$ è l'elemento dello

spazio

spazio AEQ , adunque $FP \times PQ$, cioè $\frac{xdx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$

$dx \sqrt{ax-xx}$ ne farà la formola; ma $\int dx \sqrt{ax-xx}$ è il segmento circolare ASB , adunque lo spazio cicloidale AEQ farà eguale al corrispondente spazio circolare ASB , e tutto lo spazio AMK al semicircolo. Ma il rettangolo $AHMK$ è quadruplo del semicircolo, poichè è il prodotto della semiperiferia nel diametro; adunque lo spazio AMH farà triplo del semicircolo, e però tutto lo spazio della cicloide triplo del circolo generatore.

• Se si volesse immediatamente lo spazio AFC ; come che il piccolo spazio $FCBE$, cioè ydx ne è l'elemento, e dall'equazione della curva abbiamo $dy = \frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, si riduca in serie l'omogeneo di compa-

razione; moltiplicando prima per $\sqrt{x}$ il numeratore, e denominatore, onde sia $\frac{dx \sqrt{ax-xx}}{x} = \frac{a^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{8a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{16a^{\frac{5}{2}}}$ ec., e però integran-

do,

do, $\int \frac{dx \sqrt{ax - xx}}{x}$, cioè $y = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}$ —

$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a^{\frac{5}{2}}}$ ec., onde $ydx = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{3a^{\frac{1}{2}}}$ —

$\frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{20a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{56a^{\frac{5}{2}}}$ ec., e finalmente integrando,

$$\int ydx = ABE = \frac{4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{70a^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{252a^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

ESEMPIO IX.

100. Sia la concoide ADR , $CB = BA = a$, $CM = x$, $MD = y$, (Fig. 17.) e si voglia lo spazio $ADGB$. Chiamo $CG = z$, la quale farà sempre data per le x , ed y della proposta curva, come è assai chiaro. Sia CE infinitamente prossima a CD , e col centro C , cogli intervalli CG , CD si descrivano i due archetti GI , DF , farà $HI = dz$, ed il trapezio $FDGI$ l'elemento del ricercato spazio. Per la similitudine de'

f . . . trian-

triangoli HIG , BGC , farà $GI = \frac{adz}{\sqrt{zz-aa}}$, e per la

similitudine de' settori CGI , CDF , farà $DF = \frac{azdz + aadz}{z\sqrt{zz-aa}}$. Ma il trapezio $FDGI$ è $= DF + GI \times \frac{1}{2}GD =$

$$\frac{2aazdz + a^1dz}{2z\sqrt{zz-aa}}, \text{ dunque } \int \frac{2aazdz + a^1dz}{2z\sqrt{zz-aa}}, \text{ cioè } -$$

$a \sqrt{zz-aa} - z + a \times \text{arco di circolo col raggio} = a,$
 tangente $= \sqrt{zz-aa} - z$, (preso il logaritmo nella
 logaritmica della sottangente $= a$) farà eguale allo spa-
 zio , che si cercava .

Si può niente meno avere lo spazio totale , ed i
 parziali della stessa concoide considerando la curva in
 relazione al suo asse . Sia nella stessa Figura $AB =$
 $DG = a = BC$, $BM = x$, $MD = y$, e dal punto G si
 tiri all'ordinata MD la perpendicolare GO , farà $DO =$
 $\sqrt{aa-xx}$, per l'angolo retto GOD , e per la simili-
 tudine de' triangoli CBG , GOD farà $BG = \frac{a\sqrt{aa-xx}}{x} =$

$$MO; \text{ dunque } MD = \sqrt{aa-xx} + \frac{a\sqrt{aa-xx}}{x} = y,$$

quindi ydx , cioè l'elemento dello spazio , farà
 $dx\sqrt{aa-xx} + \frac{adx\sqrt{aa-xx}}{x}$. Il primo termine inte-

grato

grato dipende della quadratura del circolo, il secondo da quella dell'iperbola.

E S E M P I O X.

101. Sia AMI (Fig. 18.) la Cissoide di Diocle, la di cui equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Sarà dunque la formola,

sostituito il valore di y dato dall'equazione, $\frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{a-x^{\frac{1}{2}}}$,

il di cui integrale dipende dalla quadratura del circolo. Per avere il rapporto dello spazio totale della cissoide a quello del circolo generatore, si rifletta, che, essendo l'equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$, farà anco $yy \times ax - xx = x^4$,

e però $y \sqrt{ax - xx} = xx$. Ciò posto, differenziando la proposta equazione $ayy - xyy = x^3$, viene $2aydy - 2xydy - yydx = 3xxdx$, cioè $2dy \times \frac{y}{a-x} - ydx = 3xxdx$, e

perchè $xx = y \sqrt{ax - xx}$, dunque $2dy \times \frac{y}{a-x} - ydx = 3dx \sqrt{ax - xx}$. Ma $dy \times \frac{y}{a-x}$ è l'elemento dello spazio $AMQB$, ydx è l'elemento dello spazio

f 2

AMP,

AMP, ed integrando rispetto allo spazio totale, è
 $\int dy \times \overline{a-x} = \int y dx$, dunque in tale circostanza sarà
 $2 \int dy \times \overline{a-x} - \int y dx = \int dy \times \overline{a-x}$, e però
 $\int dy \times \overline{a-x} = 3 \int dx \sqrt{ax - xx}$, e perchè nel caso
 dello spazio totale della Cissoide $\int dx \sqrt{ax - xx}$ è l'a-
 rea del semicircolo *ABN*; quindi lo spazio della Cif-
 foide infinitamente prodotto è triplo del semicircolo ge-
 neratore.

ESEMPIO XI.

102. Sia la Logaritmica *HBD* (*Fig. 19.*) all' asin-
 toto *MQ*, e sia *AB* = alla sottangente = *a*, *KH* = *y*,
AK = *x*, e l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$. Sarà adunque la

formola $y dx = a dy$, ed integrando $\int y dx = ay + bb$;
 ma posta $y = a$, farà $bb = -aa$, adunque l'integrale,
 compito, cioè lo spazio *AKHB* = $ay - aa$. Presa una
 qualunque altra ordinata *MN* = *z*, farà pure *AMNB* =
 $az - aa$; adunque *MKHN* = $ay - az$. Sia l'ordinata
EF minore di *AB*, ed eguale ad *y*, *AE* = $-x$, farà

nello

nello stesso modo l'equazione $\frac{a dy}{y} = dx$, perchè essen-

do negativa la x , deve essere pure negativa la sua differenza, ma crescendo l'assissa x , cala l'ordinata y , adunque dovrà essere negativa la dy ; per lo che sarà pure negativo l'elemento dello spazio, sarà adunque esso elemento $-y dx$, cioè $-a dy$, ed integrando, $-ay + bb$, ma quando y sia $= a$, sarà $bb = aa$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio $AEFB$ sarà $= aa - ay$; e posta $y = 0$, cioè quando egli sia infinitamente prodotto dalla parte di Q , sarà egli $= aa$; ed in conseguenza lo stesso spazio infinitamente prodotto dalla parte di Q , ma che principj da una qualunque ordinata $EF = y$, sarà $= ay$.

ESEMPIO XII.

103. La curva ABF sia la Traittoria, (Fig. 20.) la di cui proprietà primaria è, che la tangente BP di un qualunque punto B , sia sempre costante eguale ad una data retta. Si faccia una qualunque assissa $ED = x$, l'ordinata $DB = y$, l'arco della curva $AB = u$, e la data retta $= a$. Perchè crescendo l'assissa ED , cala l'ordinata DB , sarà negativo il di lei elemento, cioè $-dy$; quindi per la proprietà della curva avremo l'equazione

quazione $-\frac{y du}{dy} = a$, e posto in luogo di du il valore

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$, farà $dx = -\frac{dy \sqrt{ax - yy}}{y}$. Ciò fatto, nella

formola $y dx$ degli spazj posto in luogo di dx il valore dato dall'equazione della curva, avremo $-dy \sqrt{ax - yy}$, elemento di un qualunque spazio $ABDE$. Ma posta AE la prima delle ordinate $= a$, e col raggio EA descritto il quadrante AQM , e condotta BQ parallela ad MH , poichè $DB = EC = y$, è per la proprietà del circolo, $CQ = \sqrt{ax - yy}$, anco l'elemento dello spazio circolare CQA farà $-dy \sqrt{ax - yy}$; quindi lo spazio CQA eguale allo spazio $ABDE$, e così degli'altri, e per conseguenza lo spazio infinitamente prodotto compreso dalla trattoria ABF , dall'asintoto EH , e dalla retta AE farà eguale al quadrante AME .

ESEMPIO XIII.

104. Sia la spirale ACB , (Fig. 21.) ed $AB = a$ il raggio del circolo BMD , la di cui periferia $= b$, un qualunque arco $BD = x$, $AC = y$; farà l'equazione $by = ax$. Condotta AE infinitamente prossima ad AD , sia $ED = dx$, e col centro A si descriva l'archetto infinitesimo CH ; per la similitudine de' settori ACH ,
ADE

ADE, farà $CH = \frac{ydx}{a}$, e però il settore *ACH*, elemento dello spazio *ANCA*, farà $= \frac{yydx}{2a}$; ma, per l'equazione della curva, è $y = \frac{ax}{b}$, dunque esso elemento farà $= \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando, $\frac{ax^2}{6bb}$ (ommesa la costante, che è superflua) farà lo spazio *ACN*, e fatta $x = b$ rispetto a tutto lo spazio *ANB*, farà esso $= \frac{ab}{6}$.

Sia l'equazione generale alle infinite spirali $a^m x^n = b^n y^m$, adunque farà $yy = \frac{aa x^{\frac{2n}{m}}}{b^{\frac{2n}{m}}}$, e la formola dello

spazio farà $\frac{ax^{\frac{2n}{m}} dx}{2b^{\frac{2n}{m}}}$, ed integrando, $\frac{m.3x^{\frac{2n+m}{m}}}{4n+2m \times b^{\frac{2n}{m}}}$, e fatta $x=b$, farà lo spazio intero $= \frac{mab}{4n+2m}$.

E' facile a vedere, che lo spazio *ABMDCNA* terminato dal raggio *AB*, dall'arco di circolo *BMD*, e dalla porzione *ANC* della spirale farà $\frac{ax}{2} - \frac{ax^3}{6bb}$, perchè egli è eguale al settore *ABMDA* meno lo spazio *ACN*; ma se lo volemmo per mezzo di formola diffe-

differenziale, basta osservare, che l'elemento di esso sarà il trapezio infinitesimo $ECHD$, il quale si sa essere $= DE + CH \times \frac{CD}{2}$, cioè $\frac{dx}{2} + \frac{ydx}{2} \times \frac{a-y}{2} = \frac{aadx - yydx}{2}$, e ponendo in luogo di yy il valore $\frac{axx}{bb}$ dato dall'equazione, sarà $\frac{aadx}{2} - \frac{axxdx}{2bb}$, ed integrando (ommesa la costante superflua) $\frac{ax^2}{2} - \frac{ax^3}{6bb}$.

ESEMPIO XIV.

105. Sia la parabola ABM (Fig. 22.) dell'equazione $ax = yy$, e sia $AC = x$, $CB = y$, e la ragione del seno tutto al seno retto dell'angolo BCD sia quella di a alla b ; al seno del complemento, quella di a alla f , sarà $BD = \frac{by}{a}$, $CD = \frac{fy}{a}$. Sia $CH = dx$, adunque $CH \times DB = CHMB$, elemento dello spazio ACB , e però la formola sarà $\frac{bydx}{a}$, e posto in luogo di y il valore dato dall'equazione, cioè $\sqrt{ax}$, sarà $\frac{bdx\sqrt{ax}}{a}$, ed integrando, $\frac{2bx\sqrt{ax}}{3a}$, o sia $\frac{2bxy}{3a} = \frac{2}{3} AC \times BD$, ommesa la costante superflua.

ESEM-

ESEMPIO XV.

106. Sia la parabola ACM (*Fig. 23.*) riferita al fuoco B , la di cui equazione sarà $\frac{atz}{\sqrt{2az - az}} = du$, essen-

do $BC = z$, $CD = du$, archetto infinitesimo di circolo, parametro $= 2a$. Sarà dunque il rettangolo infinitesimo BMC , o sia BDC l'elemento dello spazio ABC , e però $\frac{zdu}{2}$, cioè $\frac{atzdz}{2\sqrt{2az - az}}$ la formola, il di cui inte-

grale si trova essere $\frac{z + a\sqrt{2az - az}}{6} + mm$. Ma presa

$z = BA = \frac{1}{2}a$, nel qual caso deve essere nullo lo spazio, sarà $mm = 0$, adunque l'integrale compito, cioè lo spazio ABC , sarà $= \frac{z + a\sqrt{2az - az}}{6}$.

Ed in fatti dal punto C abbassata la perpendicolare CQ ad AQ , lo spazio BCA è eguale allo spazio QCA meno il triangolo BQC , ma fatta $BQ = x$, $QC = y$, sarà $QCA - QCB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a + x \times y - \frac{xy}{2} = \frac{2a + x \times y}{6}$; adunque $BCA = \frac{2a + x \times y}{6}$, ma per la proprietà della

t

pa-

parabola, $BC = AQ + AB = x + a$, cioè $z = x + a$,
 ed $y = \sqrt{aa + 2ax} = \sqrt{2az - aa}$; sostituiti adunque in
 luogo di x , ed y quelli valori, troveremo $BCA =$
 $\frac{2a + x}{6} \times y = \frac{a + z}{6} \sqrt{2az - aa}$, come sopra.

ESEMPIO XVI.

107. Se la quarta parte AC (Fig. 24.) della periferia
 di circolo s'intenderà distesa nella retta (ac), e preta una
 qualunque porzione (ae) eguale all' arco AE , si alzi
 normale (ed) eguale al seno retto DE , la curva (at),
 che passerà per tutti i punti (d) così determinati, si
 chiama la linea de' seni retti. Prodotta (ac) onde sia
 eguale alla semicirconfenza del circolo, la curva ave-
 rà un'altro ramo al di là di (ct) simile, ed eguale
 al primo.

Sia il raggio $= r$, un qualunque arco $AE = x = (ae)$,
 il corrispondente seno $DE = y = (ed)$; poichè il differen-
 ziale, o sia la flussione dell' arco espressa per mezzo del
 seno si trova essere $\frac{r dy}{\sqrt{rr - yy}}$, avremo $dx = \frac{r dy}{\sqrt{rr - yy}}$,

equazione della nostra curva. La formola adunque $y dx$,
 sostituito il valore di dx , farà $\frac{ry dy}{\sqrt{rr - yy}}$, ed integran-

do,

do, $-r\sqrt{rr-yy} + n$; ma posta $y=0$, viene $n=rr$, dunque l'integrale compito è $rr - r\sqrt{rr-yy}$ = allo spazio (*ade*), e fatta $y=r$, farà rr = allo spazio totale (*ate*). Quindi fatto il quadrato *TH* del raggio, e prodotto il seno *DE* in *M*, lo spazio (*ade*) farà eguale al rettangolo *DH*, e lo spazio totale (*ate*) eguale al quadrato *TH*.

198. Gli addotti esempj possono bastare per fare uso del metodo, rimane solamente d'avvertirsi, che molte volte le equazioni delle curve, gli spazj delle quali si vogliono quadrare (e ciò s'intenda pure rispetto alle rettificazioni, quadrature di superficie, e cubature) possono essere tali, che non abbiano le incognite separate, nè si possano separare colla sola divisione, ed in conseguenza non siano adattabili alle formole. Tale sarebbe la curva $x' + y' = axy$.

In questi casi bisogna valersi di qualche congrua sostituzione, per mezzo di cui l'equazione si trasformi in un'altra, in cui sieno separate, o separabili le incognite. Ma non si può generalmente definire, quale sostituzione debba farsi; bisognerà avere pratica, e provarne molte per ottenere, quando si possa, l'intento.

Rispetto alla proposta $x' + y' = axy$. Si ponga $y = \frac{axx}{az}$, e fatta la sostituzione, farà l'equazio-

ne $x^3 + \frac{a^3 x^6}{z^6} = \frac{a^3 x^3}{z^3}$, cioè $x^3 = \frac{a^3 z^3 - z^6}{a^3}$. Differen-

ziando adunque, $xxdx = \frac{3a^3 z^2 dz - 6z^5 dz}{3a^3}$; quindi

presa la formola degli spazj, cioè ydx , poichè per la sostituzione è $y = \frac{axx}{zz}$, farà essa formola $\frac{axxdx}{zz}$, e

sostituendo in luogo di $xxdx$ il valore ritrovato $\frac{3a^3 z^2 dz - 6z^5 dz}{3a^3}$, farà $ydx = \frac{4a^3 z^2 dz - 6z^5 dz}{3a^3}$, ed inte-

grando $\int ydx = \frac{2}{3} zz - \frac{z^6}{2a^3}$; e restituendo in luogo di zz

il valore $\frac{axx}{y}$, farà finalmente $\int ydx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^6}{2yy}$.

E S E M P I O XVII.

109. Sia la curva $a^3 xxyy - x^6 = a^6 y^3$, di cui si voglia lo spazio. Pongo $y = \frac{xx}{z}$, e l'equazione si tras-

formerà in quest'altra $a^3 z - x^3 z^3 = a^6$, da cui si rica-

va $x = a \sqrt[3]{\frac{aaz - a^3}{z}}$, e però $dx = \frac{a^3 dz}{3z \times \frac{aaz - a^3}{z^{\frac{2}{3}}}}$

adz

$\frac{adz \times \frac{aaz - a^2}{z^2}}{z^2}$, ed $y = \frac{aa \times \frac{aaz - a^2}{z^2}}{z^2}$; quindi avremo l'elemento dello spazio, cioè $ydx = \frac{a^5 dz}{3z^3} -$

$\frac{a^3 dz \times \frac{aaz - a^2}{z^2}}{z^2} = \frac{a^6 dz}{z^3} - \frac{2a^5 dz}{3z^4}$, e però integrando

$\int ydx = -\frac{a^6}{4z^4} + \frac{2a^5}{9z^3}$, e restituendo in luogo di z il suo

valore $\frac{xx}{y}$, farà $-\frac{a^6 y^4}{4x^8} + \frac{2a^5 y^3}{9x^6}$ lo spazio ricercato.

A questo proposito si potrà vedere il metodo del Signor Craigio nel suo libro: *De Calculo fluentium*.

Della rettificazione delle Curve.

ESEMPIO XVIII.

110. Sia da rettificarsi la parabola apolloniana, cioè da ritrovarsi una retta linea eguale ad un'arco qualunque della stessa parabola, la di cui equazione sia $ax = yy$. Differenziando farà $adx = 2ydy$, e $dx^2 = 4yydy^2$. Ma la formola per la rettificazione è $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

adun-

adunque sostituendo in questa, in luogo di dx^2 , il valore dato dall'equazione differenziata, farà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{4yydy^2 + aady^2} = \frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$, elemento per la parabola apolloniana $ax = yy$. Passando alle integrazioni, fatta la sostituzione di $\sqrt{4yy + aa} = 2y + z$, a fine di levare il radicale, troveremo essere $\frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa} = -\frac{a' dz}{8z^3} - \frac{adz}{4z} - \frac{zdz}{8a}$, il di cui integrale si vede esse-

re in parte algebrico, ed in parte logaritmico, e però la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell'iperbola, la qual verità in quest'altro modo pure si scorge. Sia l'iperbola equilatera ADE (Fig. 25.) coi semiasse $= a$, $BC = x$ dal centro, $CD = 2y$, la di cui equazione farà $xx - aa = 4yy$. Condotta GE infinitamente prossima ad HD , farà $HGED$ l'elemento dello spazio $ADHB$, ma $HGED$ si fa essere $2dy \sqrt{4yy + aa}$, che è la stessa formola della rettificazione della parabola, a riserva del denominatore costante $\frac{a}{2}$, dunque ec.

Per mezzo della serie. Prendo la sopra scritta formola per la rettificazione della parabola, cioè $\frac{dy}{a} \sqrt{4yy + aa}$,

la

la quale ridotta in serie farà $= dy + \frac{2yy\,dy}{a^2} - \frac{2y^3\,dy}{a^4} +$

$\frac{4y^5\,dy}{a^6} - \frac{10y^7\,dy}{a^8}$ cc., ed integrando, $\int \frac{dy}{a} \sqrt{4yy + a^2}$,

cioè l'arco qualunque $= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ cc.

Se nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ in vece di sostituire in luogo di dx il valore dato per y dall'equazione della curva, sostituiremo in luogo di dy il valore dato per x , farà essa $\frac{dx \sqrt{4xx + a^2}}{\sqrt{4xx}}$, o sia $\frac{dx \sqrt{4xx + a^2}}{2x}$,

la quale non è punto più trattabile dell'altra.

Se la parabola non fosse l'apolloniana, ma la seconda cubica, la di cui equazione è $axx = y^3$, differenziando sarebbe $dx^2 = \frac{9y\,dy^2}{4a}$, e però la formola

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{\frac{9y + 4a}{4a}}$, il di cui integrale farà

$\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} + m$; ma posta $y = 0$, farà $m =$

$-\frac{8a}{27}$; adunque l'integrale compito, cioè la lunghezza

dell'arco farà $\frac{9ay + 4aa \sqrt{9ay + 4aa}}{27aa} - \frac{8a}{27}$.

Se nella parabola apolloniana ADM (Fig. 26.)
 farà

farà $AC = \frac{4x}{9}$, e si prenda una qualunque $CK = y$;

il parametro $= \frac{9x}{4}$, farà $AK = \frac{4x}{9} + y$, $KM = \sqrt{\frac{4x^2 + 9xy}{4}}$,

onde l'elemento dell'area $MKCD$ farà $dy \sqrt{\frac{4x^2 + 9xy}{4}}$,

che è lo stesso dell'elemento della lunghezza della seconda parabola cubica, a riserva della costante a , e però la rettificazione di questa, e la quadratura di quella è la stessa cosa, onde perchè quella è algebricamente quadrabile, questa è algebricamente rettificabile. Quindi generalmente, se l'espressione dell'elemento di una qualunque data curva diviso per la differenza dell'incognita si porrà per ordinata, e la incognita per l'assissa, onde nasca una nuova curva, la quadratura di questa ci darà la rettificazione della curva data.

E S E M P I O X I X.

III. Sia il circolo AEM , (Fig. 27.) AM diametro $= a$, $AB = x$, farà $BF = y = \sqrt{ax - xx}$; adunque $dy = \frac{\frac{1}{2} adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$, $dy^2 = \frac{\frac{1}{4} aadx^2 - axdx^2 + xxdx^2}{ax - xx}$,

e però FH elemento della curva $= \sqrt{dx^2 + dy^2} =$
 $\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$, e riducendo in serie, sarà

$$2\sqrt{ax - xx}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{2 \times 2 a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4 a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{5}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6 a^{\frac{5}{2}}} +$$

$$\frac{105x^{\frac{7}{2}} dx}{2 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec. , ed integrando , sarà } a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 3 a^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{2 \times 4 \times 5 a^{\frac{3}{2}}} + \frac{15x^{\frac{7}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 7 a^{\frac{5}{2}}} +$$

$$\frac{105x^{\frac{9}{2}}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9 a^{\frac{7}{2}}} \text{ ec. ; o pure effendo } dx^2 = \frac{dy^2 \times ax - xx}{\frac{1}{4}aa - ax + xx},$$

cioè (sostituendo yy in luogo di $ax - xx$) $dx^2 =$
 $\frac{yydy^2}{\frac{1}{4}aa - yy}$; posto questo valore in luogo di dx^2 nella

formola generale , sarà essa $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{ady}{2\sqrt{\frac{aa}{4} - yy}}$,

che ridotta in serie si trova essere

$$= dy + \frac{2yydy}{aa} + \frac{6y^2dy}{a^2} + \frac{20y^3dy}{a^3} + \frac{70y^4dy}{a^4} \text{ ec. , ed inte-}$$

u

grando ,

grando, farà finalmente l'arco $AF =$

$$y + \frac{2y^3}{3aa} + \frac{6y^5}{5a^4} + \frac{20y^7}{7a^6} + \frac{70y^9}{9a^8} \text{ ec.}$$

Che se il raggio fosse stato $= a$, farebbe la serie

$$y + \frac{y^3}{2 \times 3aa} + \frac{3y^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15y^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105y^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

E se finalmente farà $DB = x$, DA raggio $= a$, farà $y = \sqrt{aa - xx}$, e $dy = \frac{-x dx}{\sqrt{aa - xx}}$, adunque

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}, \text{ e riducendo in serie, farà}$$

$$\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}} = dx + \frac{xx dx}{2aa} + \frac{3x^4 dx}{2 \times 4a^4} + \frac{15x^6 dx}{2 \times 4 \times 6a^6} + \frac{105x^8 dx}{2 \times 4 \times 6 \times 8a^8} \text{ ec., ed integrando, farà l'arco } EF =$$

$$x + \frac{x^3}{2 \times 3aa} + \frac{3x^5}{2 \times 4 \times 5a^4} + \frac{15x^7}{2 \times 4 \times 6 \times 7a^6} + \frac{105x^9}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 9a^8} \text{ ec.}$$

ESEM-

ESEMPIO XX.

112. Sia l'ellissi ADC , (Fig. 28.) femiasse tras-
verso $AB = a$, femiasse conjugato $BD = b$, $BE = x$,
 $EO = y$, farà l'equazione $\frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2 - x^2$, e però

$$y dy = - \frac{b b x dx}{a^2}, \text{ e } dy^2 = \frac{b b x x dx^2}{a^2 \times a^2 - x x}$$

$$\text{generale } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{b b x x dx^2}{a^2 - a x x}} =$$

$$\frac{dx \sqrt{a^2 - a x x + b b x x}}{a \sqrt{a^2 - x x}}.$$

Se in luogo di sostituire il valore di dy dato per x
dall'equazione, sostituiremo il valore di dx , farà
 $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{\frac{a^2 y^2 - b b y y + b^4}{b^2 b b - y y}}$. Ma e l'una, e

l'altra delle due ritrovate espressioni manca di una delle
condizioni del num. 38., senza di cui si è veduto, che quelle
formole non si possono liberare dai segni radicali, e prepa-
rare per l'integrazioni. Adunque per passare alle serie,

prendo una delle due formole , per esempio

$dx \sqrt{a^4 - a^2xx + b^2xx}$; la quale si esprime con l'equi-

$$a \sqrt{aa - xx}$$

valente $dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - a^2xx}}$, e questa ridotta in serie

$$\text{farà} = dx + \frac{\frac{1}{2} bbxx dx}{aa \times aa - xx} - \frac{\frac{1}{8} b^4 x^4 dx}{a^4 \times aa - xx^2}$$

$$\frac{\frac{1}{16} b^6 x^6 dx}{a^4 \times aa - xx^3} - \frac{\frac{5}{128} b^8 x^8 dx}{a^4 \times aa - xx^4} \text{ cc. , e riducendo in}$$

oltre in serie ciascun termine di questa , cominciando dal secondo , farà

$$\begin{aligned} dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - a^2xx}} &= dx \\ &+ \frac{\frac{1}{2} bbxx dx}{aa} \times \frac{1}{aa} + \frac{xx}{a^4} + \frac{x^4}{a^6} + \frac{x^6}{a^8} \text{ cc.} \\ &- \frac{\frac{1}{8} b^4 x^4 dx}{a^4} \times \frac{1}{a^4} + \frac{2xx}{a^6} + \frac{3x^4}{a^8} + \frac{4x^6}{a^{10}} \text{ cc.} \\ &+ \frac{\frac{1}{16} b^6 x^6 dx}{a^6} \times \frac{1}{a^6} + \frac{3xx}{a^8} + \frac{6x^4}{a^{10}} + \frac{10x^6}{a^{12}} \text{ cc.} \\ &- \frac{\frac{5}{128} b^8 x^8 dx}{a^8} \times \frac{1}{a^8} + \frac{4xx}{a^{10}} + \frac{10x^4}{a^{12}} + \frac{20x^6}{a^{14}} \text{ cc.} \end{aligned}$$

ed

ed integrando, farà l'arco DO , cioè

$$\int dx \sqrt{1 + \frac{bbxx}{a^4 - aaxx}} = \frac{x}{a^4 - aaxx} + \frac{\frac{1}{2}bb}{aa} \times \frac{\frac{x^3}{3aa} + \frac{x^5}{5a^4} + \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8}}{ec.} \\ - \frac{\frac{1}{8}b^4}{a^4} \times \frac{\frac{x^5}{5a^4} + \frac{2x^7}{7a^6} + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{4x^{11}}{11a^{10}}}{ec.} \\ + \frac{\frac{1}{16}b^6}{a^6} \times \frac{\frac{x^7}{7a^6} + \frac{3x^9}{9a^8} + \frac{6x^{11}}{11a^{10}}}{ec.} \\ - \frac{\frac{5}{128}b^8}{a^8} \times \frac{\frac{x^9}{9a^8} + \frac{4x^{11}}{11a^{10}}}{ec.,}$$

e finalmente riducendo alla stessa denominazione i termini omogenei, troveremo $DO =$

$$\frac{x + \frac{bbx^3}{6a^4} + \frac{4aabb - b^4}{40a^4} \times x^5 + \frac{8a^4bb - 4aab^4 + b^6}{112a^{12}} \times x^7 + \frac{64a^4bb - 48a^4b^4 + 24aab^6 - 5b^8}{9 \times 128a^{16}} \times x^9}{ec.} \text{ Che se vo-}$$

gliasi supporre $a = b$, nel qual caso l'ellissi diviene un circolo, farà l'arco $DO = x + \frac{x^3}{6aa} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6}$

$\frac{35x^9}{9 \times 128a^8}$ ec. appunto come sopra al num. 111.

In

In altra maniera ancora . Nella formola

$dx \sqrt{a^2 - aaxx + bbxx}$ si faccia $bb - aa = -cc$, onde

$$a \sqrt{aa - xx}$$

sia $dx \sqrt{a^2 - ccxx}$; risolti in serie i due radicali, sarà

$$a \sqrt{aa - xx}$$

$$\frac{dx \sqrt{a^2 - ccxx}}{a \sqrt{aa - xx}} = \frac{dx}{a} \times \frac{aa - ccxx - c^2 x^2 - c^4 x^4 - 5c^6 x^6 - 17c^8 x^8 - 63c^{10} x^{10} - 231c^{12} x^{12} - 792c^{14} x^{14} - 2431c^{16} x^{16} - 7293c^{18} x^{18} - 21473c^{20} x^{20} - 61512c^{22} x^{22} - 167313c^{24} x^{24} - 452793c^{26} x^{26} - 1159753c^{28} x^{28} - 2929548c^{30} x^{30} - 7185360c^{32} x^{32} - 17742544c^{34} x^{34} - 43545600c^{36} x^{36} - 104857600c^{38} x^{38} - 244147200c^{40} x^{40} - 559737600c^{42} x^{42} - 1244160000c^{44} x^{44} - 2745600000c^{46} x^{46} - 5896320000c^{48} x^{48} - 12441600000c^{50} x^{50} - 26448000000c^{52} x^{52} - 54969600000c^{54} x^{54} - 111936000000c^{56} x^{56} - 224448000000c^{58} x^{58} - 448896000000c^{60} x^{60} - 877792000000c^{62} x^{62} - 167313c^{64} x^{64} - 3027072c^{66} x^{66} - 5140800c^{68} x^{68} - 8121600c^{70} x^{70} - 1159753c^{72} x^{72} - 167313c^{74} x^{74} - 21473c^{76} x^{76} - 2431c^{78} x^{78} - 231c^{80} x^{80} - 17c^{82} x^{82} - 63c^{84} x^{84} - 17c^{86} x^{86} - 63c^{88} x^{88} - 17c^{90} x^{90} - 63c^{92} x^{92} - 17c^{94} x^{94} - 63c^{96} x^{96} - 17c^{98} x^{98} - 63c^{100} x^{100} - 17c^{102} x^{102} - 63c^{104} x^{104} - 17c^{106} x^{106} - 63c^{108} x^{108} - 17c^{110} x^{110} - 63c^{112} x^{112} - 17c^{114} x^{114} - 63c^{116} x^{116} - 17c^{118} x^{118} - 63c^{120} x^{120} - 17c^{122} x^{122} - 63c^{124} x^{124} - 17c^{126} x^{126} - 63c^{128} x^{128} - 17c^{130} x^{130} - 63c^{132} x^{132} - 17c^{134} x^{134} - 63c^{136} x^{136} - 17c^{138} x^{138} - 63c^{140} x^{140} - 17c^{142} x^{142} - 63c^{144} x^{144} - 17c^{146} x^{146} - 63c^{148} x^{148} - 17c^{150} x^{150} - 63c^{152} x^{152} - 17c^{154} x^{154} - 63c^{156} x^{156} - 17c^{158} x^{158} - 63c^{160} x^{160} - 17c^{162} x^{162} - 63c^{164} x^{164} - 17c^{166} x^{166} - 63c^{168} x^{168} - 17c^{170} x^{170} - 63c^{172} x^{172} - 17c^{174} x^{174} - 63c^{176} x^{176} - 17c^{178} x^{178} - 63c^{180} x^{180} - 17c^{182} x^{182} - 63c^{184} x^{184} - 17c^{186} x^{186} - 63c^{188} x^{188} - 17c^{190} x^{190} - 63c^{192} x^{192} - 17c^{194} x^{194} - 63c^{196} x^{196} - 17c^{198} x^{198} - 63c^{200} x^{200} - 17c^{202} x^{202} - 63c^{204} x^{204} - 17c^{206} x^{206} - 63c^{208} x^{208} - 17c^{210} x^{210} - 63c^{212} x^{212} - 17c^{214} x^{214} - 63c^{216} x^{216} - 17c^{218} x^{218} - 63c^{220} x^{220} - 17c^{222} x^{222} - 63c^{224} x^{224} - 17c^{226} x^{226} - 63c^{228} x^{228} - 17c^{230} x^{230} - 63c^{232} x^{232} - 17c^{234} x^{234} - 63c^{236} x^{236} - 17c^{238} x^{238} - 63c^{240} x^{240} - 17c^{242} x^{242} - 63c^{244} x^{244} - 17c^{246} x^{246} - 63c^{248} x^{248} - 17c^{250} x^{250} - 63c^{252} x^{252} - 17c^{254} x^{254} - 63c^{256} x^{256} - 17c^{258} x^{258} - 63c^{260} x^{260} - 17c^{262} x^{262} - 63c^{264} x^{264} - 17c^{266} x^{266} - 63c^{268} x^{268} - 17c^{270} x^{270} - 63c^{272} x^{272} - 17c^{274} x^{274} - 63c^{276} x^{276} - 17c^{278} x^{278} - 63c^{280} x^{280} - 17c^{282} x^{282} - 63c^{284} x^{284} - 17c^{286} x^{286} - 63c^{288} x^{288} - 17c^{290} x^{290} - 63c^{292} x^{292} - 17c^{294} x^{294} - 63c^{296} x^{296} - 17c^{298} x^{298} - 63c^{300} x^{300} - 17c^{302} x^{302} - 63c^{304} x^{304} - 17c^{306} x^{306} - 63c^{308} x^{308} - 17c^{310} x^{310} - 63c^{312} x^{312} - 17c^{314} x^{314} - 63c^{316} x^{316} - 17c^{318} x^{318} - 63c^{320} x^{320} - 17c^{322} x^{322} - 63c^{324} x^{324} - 17c^{326} x^{326} - 63c^{328} x^{328} - 17c^{330} x^{330} - 63c^{332} x^{332} - 17c^{334} x^{334} - 63c^{336} x^{336} - 17c^{338} x^{338} - 63c^{340} x^{340} - 17c^{342} x^{342} - 63c^{344} x^{344} - 17c^{346} x^{346} - 63c^{348} x^{348} - 17c^{350} x^{350} - 63c^{352} x^{352} - 17c^{354} x^{354} - 63c^{356} x^{356} - 17c^{358} x^{358} - 63c^{360} x^{360} - 17c^{362} x^{362} - 63c^{364} x^{364} - 17c^{366} x^{366} - 63c^{368} x^{368} - 17c^{370} x^{370} - 63c^{372} x^{372} - 17c^{374} x^{374} - 63c^{376} x^{376} - 17c^{378} x^{378} - 63c^{380} x^{380} - 17c^{382} x^{382} - 63c^{384} x^{384} - 17c^{386} x^{386} - 63c^{388} x^{388} - 17c^{390} x^{390} - 63c^{392} x^{392} - 17c^{394} x^{394} - 63c^{396} x^{396} - 17c^{398} x^{398} - 63c^{400} x^{400} - 17c^{402} x^{402} - 63c^{404} x^{404} - 17c^{406} x^{406} - 63c^{408} x^{408} - 17c^{410} x^{410} - 63c^{412} x^{412} - 17c^{414} x^{414} - 63c^{416} x^{416} - 17c^{418} x^{418} - 63c^{420} x^{420} - 17c^{422} x^{422} - 63c^{424} x^{424} - 17c^{426} x^{426} - 63c^{428} x^{428} - 17c^{430} x^{430} - 63c^{432} x^{432} - 17c^{434} x^{434} - 63c^{436} x^{436} - 17c^{438} x^{438} - 63c^{440} x^{440} - 17c^{442} x^{442} - 63c^{444} x^{444} - 17c^{446} x^{446} - 63c^{448} x^{448} - 17c^{450} x^{450} - 63c^{452} x^{452} - 17c^{454} x^{454} - 63c^{456} x^{456} - 17c^{458} x^{458} - 63c^{460} x^{460} - 17c^{462} x^{462} - 63c^{464} x^{464} - 17c^{466} x^{466} - 63c^{468} x^{468} - 17c^{470} x^{470} - 63c^{472} x^{472} - 17c^{474} x^{474} - 63c^{476} x^{476} - 17c^{478} x^{478} - 63c^{480} x^{480} - 17c^{482} x^{482} - 63c^{484} x^{484} - 17c^{486} x^{486} - 63c^{488} x^{488} - 17c^{490} x^{490} - 63c^{492} x^{492} - 17c^{494} x^{494} - 63c^{496} x^{496} - 17c^{498} x^{498} - 63c^{500} x^{500} - 17c^{502} x^{502} - 63c^{504} x^{504} - 17c^{506} x^{506} - 63c^{508} x^{508} - 17c^{510} x^{510} - 63c^{512} x^{512} - 17c^{514} x^{514} - 63c^{516} x^{516} - 17c^{518} x^{518} - 63c^{520} x^{520} - 17c^{522} x^{522} - 63c^{524} x^{524} - 17c^{526} x^{526} - 63c^{528} x^{528} - 17c^{530} x^{530} - 63c^{532} x^{532} - 17c^{534} x^{534} - 63c^{536} x^{536} - 17c^{538} x^{538} - 63c^{540} x^{540} - 17c^{542} x^{542} - 63c^{544} x^{544} - 17c^{546} x^{546} - 63c^{548} x^{548} - 17c^{550} x^{550} - 63c^{552} x^{552} - 17c^{554} x^{554} - 63c^{556} x^{556} - 17c^{558} x^{558} - 63c^{560} x^{560} - 17c^{562} x^{562} - 63c^{564} x^{564} - 17c^{566} x^{566} - 63c^{568} x^{568} - 17c^{570} x^{570} - 63c^{572} x^{572} - 17c^{574} x^{574} - 63c^{576} x^{576} - 17c^{578} x^{578} - 63c^{580} x^{580} - 17c^{582} x^{582} - 63c^{584} x^{584} - 17c^{586} x^{586} - 63c^{588} x^{588} - 17c^{590} x^{590} - 63c^{592} x^{592} - 17c^{594} x^{594} - 63c^{596} x^{596} - 17c^{598} x^{598} - 63c^{600} x^{600} - 17c^{602} x^{602} - 63c^{604} x^{604} - 17c^{606} x^{606} - 63c^{608} x^{608} - 17c^{610} x^{610} - 63c^{612} x^{612} - 17c^{614} x^{614} - 63c^{616} x^{616} - 17c^{618} x^{618} - 63c^{620} x^{620} - 17c^{622} x^{622} - 63c^{624} x^{624} - 17c^{626} x^{626} - 63c^{628} x^{628} - 17c^{630} x^{630} - 63c^{632} x^{632} - 17c^{634} x^{634} - 63c^{636} x^{636} - 17c^{638} x^{638} - 63c^{640} x^{640} - 17c^{642} x^{642} - 63c^{644} x^{644} - 17c^{646} x^{646} - 63c^{648} x^{648} - 17c^{650} x^{650} - 63c^{652} x^{652} - 17c^{654} x^{654} - 63c^{656} x^{656} - 17c^{658} x^{658} - 63c^{660} x^{660} - 17c^{662} x^{662} - 63c^{664} x^{664} - 17c^{666} x^{666} - 63c^{668} x^{668} - 17c^{670} x^{670} - 63c^{672} x^{672} - 17c^{674} x^{674} - 63c^{676} x^{676} - 17c^{678} x^{678} - 63c^{680} x^{680} - 17c^{682} x^{682} - 63c^{684} x^{684} - 17c^{686} x^{686} - 63c^{688} x^{688} - 17c^{690} x^{690} - 63c^{692} x^{692} - 17c^{694} x^{694} - 63c^{696} x^{696} - 17c^{698} x^{698} - 63c^{700} x^{700} - 17c^{702} x^{702} - 63c^{704} x^{704} - 17c^{706} x^{706} - 63c^{708} x^{708} - 17c^{710} x^{710} - 63c^{712} x^{712} - 17c^{714} x^{714} - 63c^{716} x^{716} - 17c^{718} x^{718} - 63c^{720} x^{720} - 17c^{722} x^{722} - 63c^{724} x^{724} - 17c^{726} x^{726} - 63c^{728} x^{728} - 17c^{730} x^{730} - 63c^{732} x^{732} - 17c^{734} x^{734} - 63c^{736} x^{736} - 17c^{738} x^{738} - 63c^{740} x^{740} - 17c^{742} x^{742} - 63c^{744} x^{744} - 17c^{746} x^{746} - 63c^{748} x^{748} - 17c^{750} x^{750} - 63c^{752} x^{752} - 17c^{754} x^{754} - 63c^{756} x^{756} - 17c^{758} x^{758} - 63c^{760} x^{760} - 17c^{762} x^{762} - 63c^{764} x^{764} - 17c^{766} x^{766} - 63c^{768} x^{768} - 17c^{770} x^{770} - 63c^{772} x^{772} - 17c^{774} x^{774} - 63c^{776} x^{776} - 17c^{778} x^{778} - 63c^{780} x^{780} - 17c^{782} x^{782} - 63c^{784} x^{784} - 17c^{786} x^{786} - 63c^{788} x^{788} - 17c^{790} x^{790} - 63c^{792} x^{792} - 17c^{794} x^{794} - 63c^{796} x^{796} - 17c^{798} x^{798} - 63c^{800} x^{800} - 17c^{802} x^{802} - 63c^{804} x^{804} - 17c^{806} x^{806} - 63c^{808} x^{808} - 17c^{810} x^{810} - 63c^{812} x^{812} - 17c^{814} x^{814} - 63c^{816} x^{816} - 17c^{818} x^{818} - 63c^{820} x^{820} - 17c^{822} x^{822} - 63c^{824} x^{824} - 17c^{826} x^{826} - 63c^{828} x^{828} - 17c^{830} x^{830} - 63c^{832} x^{832} - 17c^{834} x^{834} - 63c^{836} x^{836} - 17c^{838} x^{838} - 63c^{840} x^{840} - 17c^{842} x^{842} - 63c^{844} x^{844} - 17c^{846} x^{846} - 63c^{848} x^{848} - 17c^{850} x^{850} - 63c^{852} x^{852} - 17c^{854} x^{854} - 63c^{856} x^{856} - 17c^{858} x^{858} - 63c^{860} x^{860} - 17c^{862} x^{862} - 63c^{864} x^{864} - 17c^{866} x^{866} - 63c^{868} x^{868} - 17c^{870} x^{870} - 63c^{872} x^{872} - 17c^{874} x^{874} - 63c^{876} x^{876} - 17c^{878} x^{878} - 63c^{880} x^{880} - 17c^{882} x^{882} - 63c^{884} x^{884} - 17c^{886} x^{886} - 63c^{888} x^{888} - 17c^{890} x^{890} - 63c^{892} x^{892} - 17c^{894} x^{894} - 63c^{896} x^{896} - 17c^{898} x^{898} - 63c^{900} x^{900} - 17c^{902} x^{902} - 63c^{904} x^{904} - 17c^{906} x^{906} - 63c^{908} x^{908} - 17c^{910} x^{910} - 63c^{912} x^{912} - 17c^{914} x^{914} - 63c^{916} x^{916} - 17c^{918} x^{918} - 63c^{920} x^{920} - 17c^{922} x^{922} - 63c^{924} x^{924} - 17c^{926} x^{926} - 63c^{928} x^{928} - 17c^{930} x^{930} - 63c^{932} x^{932} - 17c^{934} x^{934} - 63c^{936} x^{936} - 17c^{938} x^{938} - 63c^{940} x^{940} - 17c^{942} x^{942} - 63c^{944} x^{944} - 17c^{946} x^{946} - 63c^{948} x^{948} - 17c^{950} x^{950} - 63c^{952} x^{952} - 17c^{954} x^{954} - 63c^{956} x^{956} - 17c^{958} x^{958} - 63c^{960} x^{960} - 17c^{962} x^{962} - 63c^{964} x^{964} - 17c^{966} x^{966} - 63c^{968} x^{968} - 17c^{970} x^{970} - 63c^{972} x^{972} - 17c^{974} x^{974} - 63c^{976} x^{976} - 17c^{978} x^{978} - 63c^{980} x^{980} - 17c^{982} x^{982} - 63c^{984} x^{984} - 17c^{986} x^{986} - 63c^{988} x^{988} - 17c^{990} x^{990} - 63c^{992} x^{992} - 17c^{994} x^{994} - 63c^{996} x^{996} - 17c^{998} x^{998} - 63c^{1000} x^{1000} - 17c^{1002} x^{1002} - 63c^{1004} x^{1004} - 17c^{1006} x^{1006} - 63c^{1008} x^{1008} - 17c^{1010} x^{1010} - 63c^{1012} x^{1012} - 17c^{1014} x^{1014} - 63c^{1016} x^{1016} - 17c^{1018} x^{1018} - 63c^{1020} x^{1020} - 17c^{1022} x^{1022} - 63c^{1024} x^{1024} - 17c^{1026} x^{1026} - 63c^{1028} x^{1028} - 17c^{1030} x^{1030} - 63c^{1032} x^{1032} - 17c^{1034} x^{1034} - 63c^{1036} x^{1036} - 17c^{1038} x^{1038} - 63c^{1040} x^{1040} - 17c^{1042} x^{1042} - 63c^{1044} x^{1044} - 17c^{1046} x^{1046} - 63c^{1048} x^{1048} - 17c^{1050} x^{1050} - 63c^{1052} x^{1052} - 17c^{1054} x^{1054} - 63c^{1056} x^{1056} - 17c^{1058} x^{1058} - 63c^{1060} x^{1060} - 17c^{1062} x^{1062} - 63c^{1064} x^{1064} - 17c^{1066} x^{1066} - 63c^{1068} x^{1068} - 17c^{1070} x^{1070} - 63c^{1072} x^{1072} - 17c^{1074} x^{1074} - 63c^{1076} x^{1076} - 17c^{1078} x^{1078} - 63c^{1080} x^{1080} - 17c^{1082} x^{1082} - 63c^{1084} x^{1084} - 17c^{1086} x^{1086} - 63c^{1088} x^{1088} - 17c^{1090} x^{1090} - 63c^{1092} x^{1092} - 17c^{1094} x^{1094} - 63c^{1096} x^{1096} - 17c^{1098} x^{1098} - 63c^{1100} x^{1100} - 17c^{1102} x^{1102} - 63c^{1104} x^{1104} - 17c^{1106} x^{1106} - 63c^{1108} x^{1108} - 17c^{1110} x^{1110} - 63c^{1112} x^{1112} - 17c^{1114} x^{1114} - 63c^{1116} x^{1116} - 17c^{1118} x^{1118} - 63c^{1120} x^{1120} - 17c^{1122} x^{1122} - 63c^{1124} x^{1124} - 17c^{1126} x^{1126} - 63c^{1128} x^{1128} - 17c^{1130} x^{1130} - 63c^{1132} x^{1132} - 17c^{1134} x^{1134} - 63c^{1136} x^{1136} - 17c^{1138} x^{1138} - 63c^{1140} x^{1140} - 17c^{1142} x^{1142} - 63c^{1144} x^{1144} - 17c^{1146} x^{1146} - 63c^{1148} x^{1148} - 17c^{1150} x^{1150} - 63c^{1152} x^{1152} - 17c^{1154} x^{1154} - 63c^{1156} x^{1156} - 17c^{1158} x^{1158} - 63c^{1160} x^{1160} - 17c^{1162} x^{1162} - 63c^{1164} x^{1164} - 17c^{1166} x^{1166} - 63c^{1168} x^{1168} - 17c^{1170} x^{1170} - 63c^{1172} x^{1172} - 17c^{1174} x^{1174} - 63c^{1176} x^{1176} - 17c^{1178} x^{1178} - 63c^{1180} x^{1180} - 17c^{1182} x^{1182} - 63c^{1184} x^{1184} - 17c^{1186} x^{1186} - 63c^{1188} x^{1188} - 17c^{1190} x^{1190} - 63c^{1192} x^{1192} - 17c^{1194} x^{1194} - 63c^{1196} x^{1196} - 17c^{1198} x^{1198} - 63c^{1200} x^{1200} - 17c^{1202} x^{1202} - 63c^{1204} x^{1204} - 17c^{1206} x^{1206} - 63c^{1208} x^{1208} - 17c^{1210} x^{1210} - 63c^{1212} x^{1212} - 17c^{1214} x^{1214} - 63c^{1216} x^{1216} - 17c^{1218} x^{1218} - 63c^{1220} x^{1220} - 17c^{1222} x^{1222} - 63c^{1224} x^{1224} - 17c^{1226} x^{1226} - 63c^{1228} x^{1228} - 17c^{1230} x^{1230} - 63c^{1232} x^{1232} - 17c^{1234} x^{1234} - 63c^{1236} x^{1236} - 17c^{1238} x^{1238} - 63c^{1240} x^{1240} - 17c^{1242} x^{1242} - 63c^{1244} x^{1244} - 17c^{1246} x^{1246} - 63c^{1248} x^{1248} - 17c^{1250} x^{1250} - 63c^{1252} x^{1252} - 17c^{1254} x^{1254} - 63c^{1256} x^{1256} - 17c^{1258} x^{1258} - 63c^{1260} x^{1260} - 17c^{1262} x^{1262} - 63c^{1264} x^{1264} - 17c^{1266} x^{1266} - 63c^{1268} x^{1268} - 17c^{1270} x^{1270} - 63c^{1272} x^{1272} - 17c^{1274} x^{1274} - 63c^{1276} x^{1276} - 17c^{1278} x^{1278} - 63c^{1280} x^{1280} - 17c^{1282} x^{1282} - 63c^{1284} x^{1284} - 17c^{1286} x^{1286} - 63c^{1288} x^{1288} - 17c^{1290} x^{1290} - 63c^{1292} x^{1292} - 17c^{1294} x^{1294} - 63c^{1296} x^{1296} - 17c^{1298} x^{1298} - 63c^{1300} x^{1300} - 17c^{1302} x^{1302} - 63c^{1304} x^{1304} - 17c^{1306} x^{1306} - 63c^{1308} x^{1308} - 17c^{1310} x^{1310} - 63c^{1312} x^{1312} - 17c^{1314} x^{1314} - 63c^{1316} x^{1316} - 17c^{1318} x^{1318} - 63c^{1320} x^{1320} - 17c^{1322} x^{1322} - 63c^{1324} x^{1324} - 17c^{1326} x^{1326} - 63c^{1328} x^{1328} - 17c^{1330} x^{1330} - 63c^{1332} x^{1332} - 17c^{1334} x^{1334} - 63c^{1336} x^{1336} - 17c^{1338} x^{1338} - 63c^{1340} x^{1340} - 17c^{1342} x^{1342} - 63c^{1344} x^{1344} - 17c^{1346} x^{1346} - 63c^{1348} x^{1348} - 17c^{1350} x^{1350} - 63c^{1352} x^{1352} - 17c^{1354} x^{1354} - 63c^{1356} x^{1356} - 17c^{1358} x^{1358} - 63c^{1360} x^{1360} - 17c^{1362} x^{1362} - 63c^{1364} x^{1364} - 17c^{1366} x^{1366} - 63c^{1368} x^{1368} - 17c^{1370} x^{1370} - 63c^{1372} x^{1372} - 17c^{1374} x^{1374} - 63c^{1376} x^{1376} - 17c^{1378} x^{1378} - 63c^{1380} x^{1380} - 17c^{1382} x^{1382} - 63c^{1384} x^{1384} - 17c^{1386} x^{1386} - 63c^{1388} x^{1388} - 17c^{1390} x^{1390} - 63c^{1392} x^{1392} - 17c^{1394} x^{1394} - 63c^{1396} x^{1396} - 17c^{1398} x^{1398} - 63c^{1400} x^{1400} - 17c^{1402} x^{1402} - 63c^{1404} x^{1404} - 17c^{1406} x^{1406} - 63c^{1408} x^{1408} - 17c^{1410} x^{1410} - 63c^{1412} x^{1412} - 17c^{1414} x^{1414} - 63c^{1416} x^{1416} - 17c^{1418} x^{1418} - 63c^{1420} x^{1420} - 17c^{1422} x^{1422} - 63c^{1424} x^{1424} - 17c^{1426} x^{1426} - 63c^{1428} x^{1428} - 17c^{1430} x^{1430} - 63c^{1432} x^{143$$

$$\text{de } \sqrt{dx^2 + dy^2} = dy \sqrt{1 + \frac{aay}{b^2 + bbyy}} = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{bbyy + aayy + b^2}{bb + yy}}$$

e però ridotta questa in serie o nell'una, o nell'altra maniera usata intorno all'ellissi, troveremo essere il suo integrale, cioè l'arco $BD = y + \frac{aay^3}{6b^2} - \frac{4aabb - a^2 \times y^3}{40b^2} +$

$$\frac{8aab^4 + 4a^2bb + a^4 \times y^5}{112b^{12}} - \frac{64aab^6 - 48a^2b^4 - 24a^4bb - 5a^4 \times y^7 \text{ ec.}}{9 \times 128b^{16}}$$

che è la stessa serie dell'ellissi, a riserva de' segni, e della mutazione delle veci delle costanti a, b .

ESEMPIO XXII.

114. Sia la cicloide dell'Esempio VIII. delle quadrature, (Fig. 16.) la di cui equazione sappiamo essere

$$dy = \frac{dx \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}; \text{ adunque farà la formola } \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$\frac{dx \sqrt{a}}{\sqrt{x}}, \text{ e però integrando, farà l'arco } FA = 2\sqrt{ax} =$$

al doppio della corda AS del corrispondente arco di circolo AS , e posta $x = a$, farà AM doppia del diametro del circolo generatore, e però tutta la cicloide quadrupla.

ESEM-

ESEMPIO XXIII.

115. Sia la trattoria ABF , (Fig. 20.) la di cui equazione (num. 103.) è $-\frac{ydu}{dy} = a$; dunque $du = -\frac{ady}{y}$, ed integrando, un qualunque arco $AB = u = -\int y \pm n$ nella logaritmica della sottotangente $= a$; ma fatta $u = 0$, è $y = a$, e $\int y = 0$, dunque $n = 0$, e l'integrale compito farà $u = -\int y$. Se pertanto con la sottotangente AE , per lo punto A , all'asintoto MH si descriva la logaritmica AKS , preso un qualunque punto B nella trattoria, e condotta alla logaritmica la BK parallela all'asintoto, ed abbassata la normale KN , l'intercetta NE farà eguale all'arco AB .

ESEMPIO XXIV.

116. Sia la spirale d'Archimede ACB del num. 104., (Fig. 21.) il raggio del circolo $= a$, la circonferenza $= b$, l'arco $BMD = x$, $AC = y$. Sia AE infinitamente prossima ad AD , e però $DE = dx$. Col centro A sia descritto l'arco CH , farà $CH = \frac{ydx}{a}$,

ed

ed $OH = dy$; a dunque farà CO l'elemento della curva $= \sqrt{yydx^2 + aady^2}$, ma l'equazione della curva è $ax = by$, e però $dx^2 = \frac{bbly^2}{aa}$, onde, fatta la sostituzione, farà $CO = \frac{dy}{aa} \sqrt{a^4 + bbyy}$, il di cui integrale, dopo un lungo calcolo, che ommetto per brevità, troveremo dipendere da' logaritmi, o sia dalla quadratura dell'iperbola.

Per mezzo delle serie. Faccio in primo luogo

$a^4 = bbyy$, onde la formola sia quella $\frac{bly}{aa} \sqrt{mm + yy}$, che ridotta in serie è =

$$\frac{bly}{aa} \times \left(m + \frac{yy}{2m} - \frac{y^2}{8m^2} + \frac{y^3}{16m^3} - \frac{5y^4}{128m^4} \right) \text{ ec., e però inte-}$$

grando, cioè l'arco AC farà $= \frac{bny}{aa} + \frac{by^2}{6aam} - \frac{by^3}{42aam^2} +$

$$\frac{by^4}{112aam^3} - \frac{5by^5}{9 \times 128aam^4} \text{ ec., e fatta } y = a, \text{ farà tutta}$$

la curva $ACB = \frac{bm}{a} + \frac{ab}{6m} - \frac{a^2b}{40m^2} + \frac{a^3b}{112m^3} - \frac{5a^4b}{9 \times 128m^4} \text{ ec.,}$

cioè restituendo in luogo di m il valore $\frac{a^2}{b}$, $ACB =$

$$a + \frac{bb}{6a} - \frac{b^2}{40a^2} + \frac{b^3}{112a^3} - \frac{5b^4}{9 \times 128a^4} \text{ ec.}$$

x

Sc

Se la curva fosse la logaritmica spirale ABC , (Fig. 30.) la di cui equazione $ady = b \cdot dx$, chiamando $RB = y$, e l'archetto infinitesimo $BD = dx$, posto nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ il valore di dx dato dall'equazione, farà essa $\frac{dy \sqrt{aa + bb}}{b}$, ed integrando, la curva $AB = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$.

Sia la curva ABC la spirale iperbolica, in cui la tangente deve sempre essere costante, e però l'equazione, denominando come sopra, $ydx = a \cdot dy$, farà dunque $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy \sqrt{aa + yy}}{y}$; l'integrale della qual

formola, liberata che sia dal segno radicale, troveremo dipendere dalla logaritmica.

Per mezzo della serie troveremo $\frac{dy \sqrt{aa + yy}}{y} = \frac{ady}{y} + \frac{ydy}{2a} - \frac{y^3dy}{8a^3} + \frac{y^5dy}{16a^5} - \frac{5y^7dy}{128a^7}$ ec.; ma volendo passare all'integrazioni, il primo termine non è integrabile, se non per mezzo d'un'altra serie infinita; adunque la somma della sopraferitta serie integrata, eccetto il primo termine, con l'integrale della serie, che esprime esso primo termine, formerà una serie, che farà il valore della proposta curva.

ESEM-

ESEMPIO XXV.

117. Sia la logaritmica HBD , (Fig. 19.) AB sottangente $= a$, $AK = x$, $KH = y$, e l'equazione $\frac{ady}{y} = dx$. Posto nella formola generale il valore di dx , farà $\frac{dy}{y} \sqrt{aa + yy}$, il di cui integrale dipende dalla stessa logaritmica. Ommetto l'uso delle serie, che abbastanza s'è veduto ne' superiori Esempli.

ESEMPIO XXVI.

118. Sia la parabola apolloniana con le coordinate in angolo obbliquo dell'equazione $ax = yy$. Differentiata questa, e sostituito nella formola generale delle rettificazioni, quando le coordinate sono in angolo obbliquo, cioè nella formola $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{2edxdy}{m}}$, in luogo di dx , e di dx^2 il loro valore dato per y , si avrà $\frac{2dy}{a} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale è in parte algebrico, ed in parte dipende dalla quadratura dell'iperbola.

ESEMPIO XXVIL

119. Sia l'equazione $\frac{x^t}{t} = y$ alle infinite parabole, ed alle infinite iperbole fra gl'asintoti. Differenziando farà $x^{t-1} dx = dy$, ed $x^{2t-2} dx^2 = dy^2$, onde $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, elemento della curva, $= dx \sqrt{x^{2t-2} + 1}$. Passando all'integrazioni, per valermi del metodo del num. 61. espongo la formola nel seguente modo

$$\frac{dx}{x^{2t-2} + 1} \quad - \frac{1}{2}$$

La formola canonica $\frac{x^n dx}{x^m + a^m}$ del suddetto numero è

integrabile algebricamente quando sia $\frac{1-m+n}{m}$ numero intero affermativo; e se sia intero negativo, si ridurrà alle note semplici quadrature. Paragonando questa formola $\frac{dx}{x^{2t-2} + 1}$ con la canonica, si ha $n=0$,

$$\frac{dx}{x^{2t-2} + 1} \quad - \frac{1}{2}$$

$2t-2=m$, a = all'unità; per lo che converrà, che sia $\frac{1-2t+2}{2t-2}$ numero intero, che chiamo b , dunque

$$\frac{1-2t+2}{2t-2}, \text{ cioè } \frac{3-2t}{2t-2} = b, \text{ e conseguentemente}$$

te $\frac{3 + 2b}{2 + 2b} = t$, esponente determinatore delle curve infinite.

Sia b numero positivo intero, principiando dal nulla. Se $b = 0$, farà $t = \frac{3}{2}$; se $b = 1$, farà $t = \frac{5}{4}$; sia b

qualunque numero della serie de' numeri naturali 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ec., faranno espressi gl' innumerabili valori dell' esponente t dalla seguente progressione, $t = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}$ ec. L'andamento della serie è ma-

nifesto, ed in tutti questi casi le curve paraboliche sono algebricamente rettificabili, e la prima di esse è la seconda parabola cubica.

Sia b eguale ad un numero intero negativo, ed in primo luogo sia $b = -0$, torna in campo la seconda parabola cubica, equivalendo -0 al $+0$; sia $b = -1$, l'esponente t diventa eguale ad $\frac{1}{0}$, e di conseguenza infinito; sia $b = -2$, farà $t = \frac{1}{2}$; sia $b = -3$, farà $t = \frac{3}{4}$, e così di mano in mano, e gl' infiniti va-

lori dell'esponente t saranno espressi dalla progressione $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$ ec., e le curve paraboliche indi nascenti rettificabili per via delle note quadrature.

La

La prima curva, che ci si affaccia, è la parabola conica, la di cui rettificazione richiede (num. 110.) la quadratura dell'iperbola.

L'altro caso, in cui la formola generale del num. 61., o è integrabile algebricamente, o per mezzo delle note quadrature, è che $u = \frac{1}{m} - 1 - \frac{n}{m}$ sia numero intero, cioè, sostituendo le spezie particolari di questo esempio, $-\frac{3t+2}{2t-2} = b$, e però $\frac{2+2b}{3+2b} = t$, esponente determinatore delle curve infinite.

Sia b numero intero positivo, principiando dal zero, avremo la seguente progressione

$$t = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11} \text{ ec.}$$

Sia b intero negativo, ed in primo luogo sia $b = -1$, torna in campo lo stesso esponente $t = \frac{2}{3}$, equivalendo -1 o al $+0$; sia $b = -2$, l'esponente t diventa eguale alla frazione $\frac{0}{1}$, e di conseguenza nullo; sia $b = -3$, $b = -4$ ec., avremo la seguente progressione $t = \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$ ec.

La frazione, che dà il valore dell'esponente determinatore t , è la stessa nell'uno, e nell'altro caso, solo che nel secondo è inversa del primo, dal che dovevano

no

no nascere, come di fatto sono nate inverse le progressioni; le curve adunque scoperte per mezzo dell'una, e dell'altra formola sono le medesime, ma con gl'esponenti inversi, vale a dire riferite a due assi differenti; a cagion d'esempio i due esponenti $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$ appartengono alla parabola apolloniana, che in due ma-

niera ci si presenta $x^{\frac{1}{2}} = y$, vale a dire $x = yy$; ed in oltre $xx = y$, equazione locale al trilineo parabolico.

Quelle curve pertanto, che sono inchiusse nelle premesse progressioni, o sono integrabili algebricamente, o non esigono quadrature oltre il circolo, e l'iperbola; ma le altre infinite richieggono tetragonismi più alti.

Dalle nostre progressioni appare, che il valore dell'esponente t non è mai negativo, onde nessuna iperbola non ammette rettificazione nè algebrica, nè dipendente dalle mentovate più semplici quadrature.

Delle Cubature.

ESEMPIO XXIII.

120. Sia il cono retto $ACGKA$; (Fig. 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione AD dell'asse AB sia $= x$,
farà

farà y , cioè $DE = \frac{bx}{a}$, e però nella formola generale

$\frac{cyydx}{2r}$ sostituito quello valore in luogo di y , farà essa

$\frac{cbbx^2dx}{2ar}$, ed integrando $\frac{cbbx^3}{3ar}$, rispetto ad una qualun-

que porzione presa dal vertice (ommesa la costante superflua), e fatta $x = a$, farà tutto il cono $ACGKA = \frac{cbba}{6r} = \frac{cbb}{2r} \times \frac{a}{3}$, cioè eguale al prodotto della base nella terza parte dell'altezza.

E perchè la solidità de' cilindri è il prodotto della base nell'altezza, farà il cilindro al cono inscritto, come 3 ad 1.

Il cono $ACGKA$ è adunque $= \frac{cbba}{6r}$, ed il cono

$AIEMP = \frac{cbbx^3}{3ar}$, adunque il frusto di cono $IMCK$

farà $\frac{cbb}{6r} \times a - \frac{x^3}{3a}$, e però farà a tutto il cono nella

ragione di $a^3 - x^3$ ad a^3 ; onde se per esempio faremo

$AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$, farà il frusto a tutto il cono, come

$a^3 - \frac{a^3}{8}$, a^3 ; cioè come 7, 8, ed al cono $AEMPI$,

come 7, 1.

Ogni qual volta però si pensa a misurare qualche solido, fa di mestieri considerare, di quali elementi in-

ten-

tendiamo, ch'egli sia composto giusta le differenti sezioni, che possono adoprarfi, tornando in acconcio ora l'una, ora l'altra secondo le circostanze; indi fra i suddetti elementi scegliere quelli, che con maggiore facilità possono maneggiarsi, ed a' quali più naturalmente il calcolo s'adatta. Nel cono retto, per esempio, di cui si tratta, vi sono tanti cerchi paralleli alla base; ed oltre ciò tanti triangoli, che hanno comune il vertice con quello del cono, e per base le ordinate parallele del circolo CGK ; si può ancora tagliare il cono con tante parabole fra loro equidistanti, e con gl'assi paralleli al lato AK , ed altre molte sezioni possono farsi.

Egli è bensì vero, che per ritrovare la solidità del cono sì fatti mezzi devono riputarfi fuor di proposito, e troppo composti per lo proposto caso; ma si potrebbe proporre di tagliare il cono, o altro solido con un piano qualunque, ed indi misurare i due pezzi, in cui egli è diviso, ed in questo caso conviene far uso di quelli elementi, che a tale sezione corrispondono, come si vedrà negl'esempj 37., e 38.

ESEMPIO XXIX.

121. Sia il semicircolo CDK , (Fig. 32.) che s'aggiri attorno al raggio immobile DB , onde produca un'emisfero, e sia $DB = a$, $DA = x$, farà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$. Sostituito adunque questo valore nella formula generale, farà essa $\frac{cdx}{2r} \times \frac{2ax - xx}{r}$, ed integrando, farà la solidità del segmento indefinito $AEM = \frac{3caxx - cx^3}{6r}$, e fatta $x = a$, farà la solidità dell'emisfero $= \frac{ca^3}{3r}$, ed il doppio $\frac{2ca^3}{3r}$ tutta la sfera.

E perchè il cilindro, la di cui altezza eguale al diametro della base sia $= 2a$, è $= \frac{ca^3}{r}$, farà il cilindro circoscritto alla sfera inscritta, come $\frac{ca^3}{r}$ a $\frac{2ca^3}{3r} :: 3, 2$, ed in conseguenza nella stessa ragione la metà del cilindro all'emisfero. Ma il cono pure, la di cui altezza eguale al raggio della base sia $= a$, raggio della sfera, è $= \frac{ca^3}{6r}$, adunque farà l'emisfero al cono inscritto, come $2, 1$.

In

In oltre essendo, come è noto, $= \frac{\sqrt{3aa}}{2}$ il raggio

della base del cono equilatero inscritto nella sfera, il di cui raggio sia $= a$, ed essendo l'altezza di esso $= \frac{3a}{2}$,

farà il cono $= \frac{9ca^3}{48r}$, e la sfera farà $= \frac{2ca^3}{3r}$, e però la sfera al cono come $\frac{2}{3}, \frac{9}{4^3}$, cioè, come 32 al 9. In-

simil modo si possono dimostrare quanti teoremi si vogliono d'Archimede in questo proposito.

E' chiara la maniera di avere un qualunque settore di sfera generato per esempio dal settore $BEDM$ del circolo; imperciocchè al segmento di sfera generato dalla figura AED , che si fa essere $= \frac{3caxx - cx^3}{6r}$,

s'aggiunga il cono generato dal triangolo $EB A$, e che si troverà essere $= \frac{c}{6r} \times 2ax - xx \times a - x$, e la som-

ma, cioè $\frac{caxx}{3r}$ farà il settore cercato.

ESEMPIO XXX.

122. Sia (Fig. 33.) la parabola di qualunque ordine, la di cui equazione $y^m = a^m - x$, la quale ruotandosi attorno all'asse AM generi il conoide parabolico. Sarà

y 2

dun-

dunque $y = a^{\frac{m-1}{m}} x^{\frac{1}{m}}$, ed $yy = a^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}}$, e però la formula generale, sostituito questo valore, farà

$$\frac{ca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{2}{m}} dx}{2r}, \text{ ed integrando, } \frac{mca^{\frac{2m-2}{m}} x^{\frac{m+2}{m}}}{2r \times \frac{m+2}$$

tà del conoide indefinito; o pure, perchè $x^{\frac{2}{m}} =$

$$\frac{yy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}, \text{ e però } x^{\frac{2+m}{m}} = \frac{xyy}{a^{\frac{2m-2}{m}}}, \text{ sostituendo questo}$$

valore nell' integrale ritrovato, farà esso $\frac{mcxyy}{2r \times \frac{m+2}$.

Sia $m = 2$, cioè la parabola apolloniana, farà il conoide $= \frac{cxyy}{4r}$, cioè il prodotto della base nella metà dell'altezza, ed in conseguenza il detto conoide farà la metà del cilindro nella medesima altezza, e nella medesima base.

Se si volesse la solidità della scodella, o sia il solido generato dalla figura ACD mossa attorno all'asse AB , dal cilindro descritto dal rettangolo $ABCD$, che sapiamo essere $= \frac{cxyy}{2r}$, si sottragga il conoide parabolico

$$\frac{mcxyy}{2r \times \frac{m+2}}, \text{ il residuo } \frac{cxyy}{r \times \frac{m+2}}{\text{ farà la scodella. E fat-}}$$

ta $m = 2$ rispetto alla parabola apolloniana, sarà la sconda della cxy metà del cilindro, appunto come deve essere, il conoide essendo pure la metà d'esso cilindro.

Si muova la figura attorno all'ordinata MO ; e sia $AM = b$, $MO = f$, $AB = x$, $BC = y$, $CK = b - x$, $KO = f - y$. Sarà il circolo del raggio $CK = \frac{c}{2r} \times \overline{b-x}^2$,

adunque il prodotto di questo circolo in dy , differenziale di KM , cioè $\frac{c}{2r} \times \overline{bbdy - 2bx dy + xxy dy}$ sarà l'elemento

del solido generato dalla figura $MACK$, e però integrando, posto in luogo di x il valore dato per y , sarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2by^{m+1}}{m+1} + \frac{y^{2m+1}}{2m+1}} =$ al solido

indefinito, o pure, ponendo x in luogo di $\frac{y^m}{a^{m-1}}$,

$\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{2bxy}{m+1} + \frac{xxxy}{2m+1}}$. E posta $x = b$, $y = f$ ris-

petto a tutto il solido generato dalla figura $ACOM$, sarà $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{2bbf}{m+1} + \frac{bbf}{2m+1}}$, cioè $\frac{2mmbbf}{2m+1} \times \frac{c}{2r}$.

E se si vuole, che la parabola sia apolloniana, cioè che sia $m = 2$, sarà il solido $= \frac{4cbbf}{15r}$.

E.

E' facile il vedere, che nella parabola apolloniana il cilindro sulla medesima base, ed altezza del detto solido farà al solido, come 15, 8; e che il solido generato dalla figura OAP farà $= \frac{7cbbf}{30r}$.

Si muova la figura attorno alla retta AP ; e sia, come sopra, $AB = x$, $BC = y$, farà $\frac{cxx}{2r}$ il circolo del raggio DC ; adunque $\frac{cxydy}{2r}$ l'elemento del solido ge-

nerato dalla figura ACD , e ponendo in luogo di x il valore dato per y , ed integrando, farà

$\frac{c}{2r} \times \frac{y^{2m+1}}{2m+1} \times a^{2m-1}$, cioè $\frac{c}{2r} \times \frac{xyy}{2m+1}$ eguale al solido indefinito, e fatta $x = b$, $y = f$, farà $\frac{cbbf}{2r \times 2m+1}$

rispetto a tutto il solido generato dalla figura AOP .

Ma il cilindro nella medesima base, ed altezza è $= \frac{cbbf}{2r}$, farà adunque il solido generato dalla figura

$$AMO = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}.$$

Ma in altra maniera ancora si può avere il solido generato dalla figura AOM ruotata attorno all'asse AB . Sia $AM = b$, $MO = f$. Il circolo del raggio DC farà $= \frac{cxx}{2r}$, ed il circolo del raggio DK farà $\frac{cbb}{2r}$,
adun-

adunque farà $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx}$ l'anello descritto dalla linea

CK , adunque $\frac{c}{2r} \times \overline{bb - xx} \times dy$ farà l'elemento del so-

lido generato dalla figura $CKMA$, e posto in luogo di x il valore dato per y , farà $\frac{c}{2r} \times \overline{bb \cdot y - \frac{y^{2m+1}}{a^{2m+1}}}$, ed

integrando, $\frac{c}{2r} \times \overline{bby - \frac{y^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m+1}}}$, e finalmente

fatta $y = f$ rispetto a tutto il solido generato dalla figura $AMOA$, farà egli $\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{f^{2m+1}}{2m+1 \times a^{2m+1}}}$; ma

quando $y = f$, farà, per la parabola, x cioè $b = \frac{f^m}{a^{m-1}}$,

e $bb = \frac{f^{2m}}{a^{2m-2}}$, adunque posto nell'integrale questo va-

lore dato per b , farà il solido =

$$\frac{c}{2r} \times \overline{bbf - \frac{bbf}{2m+1}} = \frac{c}{2r} \times \frac{2mbbf}{2m+1}, \text{ come sopra.}$$

ESEM-

ESEMPIO XXXI.

123. Sia l'ellissi ADC , (Fig. 28.) $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e però l'equazione $\frac{bb}{aa} \times \frac{2ax - xx}{2ax - xx} = yy$. Sostituito adunque nella formola generale il valore di y dato dall'equazione, farà essa $\frac{cbb}{2aar} \times \frac{2axdx - xx dx}{2ax - xx}$, ed integrando, farà $\frac{cbb}{2aar} \times \frac{axx - \frac{x^3}{3}}{3}$ eguale al solido indefinito generato dalla figura AEO mossa attorno all'asse AC . Posta $x = a$, farà $\frac{cbb a}{3r}$ metà dello sferoide; e posta $x = 2a$, farà $\frac{2cbb a}{3r}$ tutto lo sferoide.

E perchè il cono nella medesima altezza AC , e nella base, il di cui raggio sia il semiasse conjugato BD , è $= \frac{cbb a}{3r}$, ed il cilindro è $= \frac{cbb a}{3}$, farà lo sferoide due terzi del cilindro, e doppio del cono.

ESEM-

E S E M P I O XXXII.

124. Sia l'iperbola AD , (*Fig. 25.*) che s'aggiri attorno a BC , e sia il semiasse trasverso $BA = \frac{a}{2}$, il centro B , ed il parametro $= b$, $AC = x$, $CD = y$, e l'equazione $\frac{ax + xx}{a} \times \frac{b}{a} = yy$. Sostituito il valore di y nella formola generale, sarà $\frac{cbdx}{2ar} \times \frac{ax + xx}{a}$, ed integrando, sarà $\frac{cb}{2ar} \times \frac{axx + \frac{x^3}{3}}{a}$ eguale al conoide iperbolico indefinito generato dalla figura ADC .

Sia $BC = x$, il resto come sopra. Sarà l'equazione $\frac{b}{a} \times \frac{xx - aa}{4} = yy$, e però la formola sarà

$$\frac{cbdx}{2ar} \times \frac{xx - aa}{4}, \text{ ed integrando, } \frac{cb}{2ar} \times \frac{x^3 - aax}{3} + f.$$

Aggiungo la costante, che in questo caso non è zero. Per determinarla si avverta, che nel punto A , quando $x = \frac{1}{2}a$, il solido deve essere nullo, onde posto nell'integrale $\frac{1}{2}a$ in luogo di x , dovrà essere

$$f + \frac{cb}{2ar} \times \frac{a^3}{24} - \frac{a^3}{8} = 0, \text{ adunque } f = \frac{caab}{24r}; \text{ e però l'in-}$$

tegrale compito sarà $\frac{cb}{2ar} \times \frac{x^3}{3} - \frac{aax}{4} + \frac{a^3}{12}$.

S' aggiuri l'iperbola attorno al semiasse conjugato HB , e sia BA semiasse trasverso $= a$, il semiasse conjugato $= b$, $BC = x$, $CD = y$. Il circolo del raggio HD farà $= \frac{cxx}{2r}$, adunque $\frac{cxdy}{2r}$ farà l'elemento del solido generato dal piano, o sia figura $BHDA$, e posto in luogo di xx il valore dato dall'equazione della curva, avremo $\frac{cdy}{2r} \times \frac{aay + aabb}{bb}$, ed integrando, $\frac{c}{2r} \times \frac{aay^2}{3bb} + aay$, e fatta $y=b$, farà il solido $= \frac{2caab}{3r}$.

ESEMPIO XXXIII.

125. Sia l'iperbola KHF (Fig. 34.) fra gl'asintoti, $AD = a$, $DE = b$, $AP = x$, $PH = y$, e l'equazione $xy = ab$. Si muova la curva attorno all'asintoto AB . Adunque il circolo del raggio QH farà $= \frac{cxx}{2r}$, e però $\frac{cxdy}{2r}$ farà l'elemento del solido generato dalla figura $AQHFM$ infinitamente prodotta della parte di M , e posto in luogo di x il valore dato dall'equazione,

ne, sarà $\frac{caabbdy}{2xy}$, ed integrando, $f - \frac{caabb}{2y}$; ma per determinare la f , si offervi che quando sia $y = 0$, il solido deve essere $= 0$, adunque $f = \frac{caabb}{2x \times 0}$, quantità infinita, e però l'integrale compito sarà $-\frac{caabb}{2y} + \infty$,

adunque il solido di valore infinito.

Se in vece di sostituire nella formola in luogo di xx il valore dato per y dall'equazione, sostituiremo il valore di dy , sarà essa $-\frac{abcdx}{2x}$, ed integrando, $-\frac{abcx}{2x} + f$; ma il solido non può essere zero se non

quando sia x infinita, adunque la costante f da aggiungersi deve essere infinita, e però infinito il solido.

Per avere il solido generato dal piano, o figura $BAPHK$ infinitamente prodotta verso B , basta riflettere, che essendo $\frac{cx}{r}$ la periferia del circolo, il di cui

raggio è $QH = x$, sarà $\frac{cxy}{r}$ la superficie del cilindro

generato dal piano $AQHP$, ed in conseguenza sarà $\frac{cxy \cdot dx}{r}$ la solidità del cilindro vuoto generato dal ret-

tangolo infinitesimo $IPHO$; adunque la somma di tutti questi, cioè $\int \frac{cxy \cdot dx}{r}$ farà il solido, che si cerca.

Posto adunque in luogo di y il suo valore $\frac{ab}{x}$, farà l'integrale $\frac{cabx}{r}$ quantità finita, quantunque il solido sia infinitamente alto.

Nell'espressione $\frac{cabx}{r}$ del solido posto in luogo di ab il valore xy dato dall'equazione, farà $\frac{cxy}{r}$, ma $\frac{cxy}{2r}$ è il cilindro generato dal rettangolo $APHQ$; adunque il solido iperbolico farà doppio di esso cilindro, e però il solido generato dalla figura $BQHK$ infinitamente prodotta farà eguale al cilindro, che gli serve di base. Presa adunque $x = a$, ed in conseguenza $y = b$, farà il cilindro $= \frac{caab}{2r} =$ al solido sopra di esso.

ESEMPIO XXXIV.

126. Sia la logaritmica HCD , (Fig. 35.) la sottangente $CA = a$, $AB = x$, $BD = y$, e l'equazione $dx = \frac{ady}{y}$. S'aggiri attorno all'asintoto EB . Posto nella formola generale in luogo di dx il valore dato dall'equazione, farà $\frac{caydy}{2r}$, ed integrando, $\frac{cayy}{4r} + f$. Ma quando sia $y = AC = a$, il solido è zero; adunque deve

deve essere $f = -\frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compito, cioè il solido generato dal piano indefinito $ABDC$, sarà $= \frac{cayy}{4r} - \frac{ca^3}{4r}$.

Sia l'assissa AE negativa, e però $= -x$, sarà pure negativa la differenza cioè $-dx$, e perchè crescendo l'assissa cala l'ordinata, sarà pure negativa la differenza di EH , cioè $-dy$, e l'equazione della curva sarà nello stesso modo $dx = \frac{ady}{y}$. Ma per essere negativa dx , sarà negativa la formola generale, vale a dire $-\frac{cyydx}{2r}$. Sostituito adunque il valore di dx , sarà $-\frac{caydy}{2r}$, ed integrando $-\frac{cayy}{4r} + f$; ma quando il solido è zero, sarà $y = a$; adunque $f = \frac{ca^3}{4r}$, e l'integrale compito sarà $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$ eguale al solido generato dal piano $ACHE$. Posto $y = 0$, cioè supposto il solido infinitamente prodotto dalla parte di M , l'integrale sarà $= \frac{ca^3}{4r}$, adunque esso solido infinitamente prodotto sarà eguale a $\frac{ca^3}{4r}$, ma il solido generato dal piano $ACHE$ abbiamo veduto essere $\frac{ca^3}{4r} - \frac{cayy}{4r}$, adunque il solido

infi-

infinitamente prodotto generato dal piano *LEHM* farà $\frac{cayy}{4r}$.

Poichè il cilindro, il di cui raggio della base sia $AC = a$, e l'altezza pure $= a$, è $= \frac{ca^3}{2r}$, farà il solido della logaritmica infinitamente prodotto dalla parte di *M* nella base del raggio $AC = a$ al detto cilindro, come $\frac{1}{4}, \frac{1}{2} :: 1, 2$.

E S E M P I O XXXV.

127. Sia la curva *AMI* (*Fig. 18.*) la Cissoide di Diocle, la quale aggirandosi attorno alla retta *AB* descriva un solido. Sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, e l'equazione $yy = \frac{x^3}{a-x}$. Sarà adunque la formola gene-

rale de' solidi, sostituito il valore di yy , $\frac{cx^3 dx}{2r \times \frac{a-x}{a-x}}$, ed

integrando, $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} - \frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} \int a-x + f$;

ma fatta $x = 0$, il solido deve essere zero, adunque $f = \frac{caa}{2r} \int a$, e l'integrale compito $-\frac{cx^3}{6r} - \frac{caxx}{4r} -$

$\frac{caax}{2r} - \frac{caa}{2r} \int a-x + \frac{caa}{2r} \int a$ eguale al solido generato

dalla

dalla figura APM , e fatta $x = a$, farà il solido intiero $= -\frac{11ca^2}{12r} - \frac{caa}{2r} \log + \frac{caa}{2r} \log a$. Ma il logaritmo del zero è quantità infinita, e negativa, che moltiplicata in $-\frac{caa}{2r}$ fa quantità positiva, adunque il solido intiero farà infinito. Si avverta, che i suddetti logaritmi si prendono nella logaritmica della sottrahente $= a$.

Per mezzo della serie farà $\frac{cx^3 dx}{2r \times a - x} = \frac{cx^3 dx}{2ar} + \frac{cx^4 dx}{2raa} + \frac{cx^5 dx}{2ra^2} + \frac{cx^6 dx}{2ra^3} \text{ ec.}$, ed integrando, il solido generato dal piano APM farà $= \frac{cx^4}{8.1r} + \frac{cx^5}{10raa} + \frac{cx^6}{12ra^2} + \frac{cx^7}{14ra^3} \text{ ec.}$, e fatta $x = a$ rispetto al solido intiero, farà $\frac{a^4}{2r} \times \frac{c}{4} + \frac{c}{5} + \frac{c}{6} + \frac{c}{7} \text{ ec.}$, serie di valore infinito.

ESEMPIO XXXVI.

128. S'aggiri la trattoria ABF (Fig. 20.) attorno l'asintoto EH . Nella formola generale $\frac{cydx}{2r}$ sostituito il valore della dx dato dall'equazione $dx = -\frac{dy \sqrt{aa - yy}}{9}$ num. 103., avremo $-\frac{cydy \sqrt{aa - yy}}{2r}$, ed

ed integrando, $\frac{c}{6r} \times \frac{aa - yy^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$ al solido generato dalla figura $AEDB$, ommessa l'aggiunta della costante superflua. Fatta pertanto $y = 0$, farà il solido infinitamente prodotto $= \frac{ca^3}{6r}$; ma la solidità della sfera, il di cui raggio sia $AE = a$ (num. 121.) è $= \frac{2ca^3}{3r}$, dunque il solido infinitamente prodotto farà la quarta parte di essa sfera.

ESEMPIO XXXVII.

129. Sia il cilindro $QBMCP T$, (Fig. 36.) da cui con un piano per BC diametro, e nella direzione AP si tagli la porzione, o sia l'unghia $BMCPB$, si cerca la solidità di questa.

Sia $BC = QM = 2a$, $MP = QT = b$, $AD = x$, e farà DH condotta ordinata nel circolo $= \sqrt{aa - xx}$. Si tiri dal punto H parallelamente ad MP , o sia QT la retta HO , che farà nella superficie del cilindro, indi dal punto D al punto O si conduca la retta DO , che farà nel piano $BOPC$, avremo formato nella solidità dell'unghia il triangolo DHO simile al triangolo

lo AMP , e però sarà $HO = b \sqrt{aa - xx}$. Ma la somma di tutti questi triangoli DHO è appunto la ricercata solidità della metà dell'unghia, adunque sarà essa $= \int \frac{b dx}{1^a} \times \sqrt{aa - xx}$, ed integrando, $\frac{abx}{2} - \frac{bx^3}{6a}$, e fatta $x = a$, sarà finalmente la suddetta metà dell'unghia $= \frac{1}{3} aab$, e tutta $= \frac{2}{3} aab$.

In altra maniera, e più generalmente sia (Fig. 37.) il mezzo cilindro $DACHEG$, il quale per lo diametro CD sia tagliato da un piano nella direzione DE , onde nasca l'unghia $DBCEAD$, di cui si vuole la solidità. Sia $BA = a$, $AE = b$, $BQ = x$, $QM = y$, sarà $QK = \frac{bx}{a}$, e però il rettangolo $PONM = \frac{2bxy}{a}$, e questo moltiplicato in dx farà l'elemento della solidità dell'unghia, cioè $\frac{2bxy dx}{a}$.

Sia la curva DAC un semicircolo, adunque $y = \sqrt{aa - xx}$, e la formola sarà $\frac{2bxdx}{a} \sqrt{aa - xx}$, ed

integrando $= \frac{2b}{1^a} \times \frac{aa - xx^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + m$, ma la costante m ,

posta $x = 0$, si trova essere $= \frac{2}{3} baa$, adunque l'integrale

a a

grale

grale compito del solido sarà $\frac{2bax}{3} - \frac{2b}{3a} \times \frac{ax - xx^{\frac{1}{2}}}{1^a}$,
e fatta $x = a$ rispetto a tutta l'unghia, sarà essa $\frac{2b^{\frac{1}{2}}a}{3}$.

Sia la curva DAC una delle infinite parabole, e l'equazione $y^m = a - x$; sarà la formola, sostituito il valore di y , $\frac{2bx dx}{a} \times \frac{1}{a - x^{\frac{1}{m}}}$, la quale integrata conforme al num. 29., ed aggiunta la debita costante, e fatta $x = a$, darà per la solidità di tutta l'unghia $\frac{2bmma^{\frac{m+1}{m}}}{2m+1 \times m+1}$, e posta $m = 2$, cioè che la parabola

sia l'apolloniana, $\frac{8ba^{\frac{3}{2}}}{15}$. E supposto, che quando

$x = 0$, sia $BC = y = c$, sarà $a^{\frac{1}{2}} = c$, e però l'unghia $= \frac{8abc}{15}$. Nello stesso modo troverassi l'unghia del cilindro ellittico essere $= \frac{2abc}{3}$, supposto il semiasse trasverso $= a$, il semiasse conjugato $= c$ ec.

ESEMPIO XXXVIII.

130. Tagliato il conoide parabolico BAC (Fig. 38.) col piano qualunque IEH perpendicolare alla base circolare $BICH$, si dimanda la misura del pezzo compreso dalla sezione IEH , e dal piano a lei parallelo per l'asse AD .

Sia $=a$ il parametro della parabola generatrice BAC , l'assissa data $AD=b$, farà l'ordinata $DB=\sqrt{ab}$. Sieno le coordinate $DF=x$, $FE=y$, e però l'equazione alla predetta curva BAC $ab-xx=ay$. Per la natura del circolo $BICH$ farà il rettangolo $CFB=ab-xx$, eguale al quadrato $FH=zz$; ma $ab-xx=ay$, dunque $ay=zz$, e conseguentemente la sezione IEH farà una parabola con lo stesso parametro della principale. Resta pertanto fissato il rettangolo $EFH=yz=y\sqrt{ay}$; e perchè questo sta all'area IEH , come 3 a 4, farà essa area $=\frac{4}{3}y\sqrt{ay}$, ed il prodotto di essa area IEH nell'altezza infinitesima dx , flusso di $DF=x$, farà l'elemento del solido in questione, cioè $\frac{4}{3}ydx\sqrt{ay}$; ma $y=\frac{ab-xx}{a}$, dunque esso elemento

a a 2

farà

$$\text{farà } \frac{4}{3} dx \times \frac{ab - xx}{a} \sqrt{ab - xx}, \text{ o sia } \frac{4}{3} bdx \sqrt{ab - xx} -$$

$$\frac{4}{3a} xxdx \sqrt{ab - xx}.$$

L'integrale del primo termine dipende dalla quadratura del cerchio *BHC*; il secondo si ridurrà alle quadrature note per via della prima formola del num. 61.

131. Ometto gli esempj de' solidi generati da curve con le coordinate tra loro in angolo obbliquo; perchè essendo la formola per questi casi diversa dalla solita, ed ordinaria per le sole costanti, non si potranno incontrare difficoltà di natura diversa dalle già spiegate. Così pure ometto gl'esempj de' solidi generati da curve riferite al fuoco, perchè non volendomi servire della teoria de' centri di gravità, come ô detto di sopra, bisognerà ridurre le date curve ad altre riferite agl'assi, intorno alle quali già abbastanza si è parlato.

Delle Quadrature, o sia Compianazioni delle superficie de' Corpi.

ESEMPIO XXXIX.

132. Sia il cono retto *ACGK*, (Fig. 31.) $AB = a$, $BC = b$, una qualunque porzione dell'asse *AB*, come

me AD , sia $=x$, farà $DE=y=\frac{bx}{a}$, e $dy=\frac{b dx}{a}$,
 $dy^2=\frac{bb dx^2}{aa}$. Sostituito adunque questo valore di dy^2
 nella formola generale $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, farà

$$\frac{cy}{r} \sqrt{\frac{aa dx^2 + bb dx^2}{aa}} = \frac{cy \sqrt{aa + bb}}{ar}, \text{ e sostituito il va-}$$

lore di y , cioè $\frac{bx}{a}$, farà $\frac{cbx dx \sqrt{aa + bb}}{aar}$, ed integran-
 do, $\frac{cbxx \sqrt{aa + bb}}{2aar}$ rispetto alla superficie del cono

$AEMPI$; e fatta $x=a$, farà $\frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2r}$ rispetto alla

superficie di tutto il cono, e però eguale al rettangolo
 della metà della circonferenza della base nel lato AC .

La stessa determinazione avrebbersi avuta, se in-
 luogo di sostituire nella formola generale il valore di
 dy^2 , si fosse sostituito il valore di dx^2 .

Sarà per tanto la superficie del frusto conico

$$IMKCG = \frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2r} - \frac{cbxx \sqrt{aa + bb}}{2aar}, \text{ cioè}$$

$$\frac{cb \sqrt{aa + bb}}{2r} \times \frac{aa - xx}{aa}; \text{ e però farà alla superficie di tutto}$$

il cono, come $aa - xx$ ad aa .

133. Ma se il cono farà scaleno, bisognerà pro-
 cedere

cedere in altra maniera . Onde sia il cono scaleno $PAFBM$, (*Fig. 39.*) la base sia il circolo $AFBM$, e nel diametro prodotto, se fa bisogno, s'abbassi la PD normale al piano del circolo, o sia base . Si prendano nella periferia del circolo due punti F, f infinitamente prossimi, e si tirino i due lati FP, fP del cono . Egli è chiaro, che il triangolo infinitesimo PFf farà la differenza, o sia l'elemento della superficie del cono . Adunque al punto F si conduca la tangente TFQ , a cui sia normale DQ , e si congiungano i punti P, Q con la retta PQ .

Poichè il piano del triangolo PDQ passa per la retta PD normale al piano della base del cono, il piano PQD farà anch'egli normale allo stesso piano della base, ma la tangente TQ , che è nel piano pure della base, fa angolo retto con QD comune sezione de' due piani, dunque sarà normale al piano PQD , ed in conseguenza alla retta QP , e però sarà il triangolo $PFf = \frac{PQ \times Ff}{2}$.

2

Si chiami il raggio $CA = r$, $CD = b$, $CE = x$, farà $FE = \sqrt{rr - xx}$, e perchè l'angolo CFT è retto, essendo tangente del circolo la TF , sono simili i triangoli CFE, TCF ; onde sarà $CT = \frac{rr}{x}$, ma CT è alla

 $CF,$

CF , o sia CF , $CE::TD$, DQ , adunque $DQ = \frac{rr+bx}{r}$. Sia la data $PD=p$, farà dunque la $PQ =$

$\sqrt{pp+\frac{rr+bx}{r}}$; ma l'elemento del cerchio Ff si fa essere $-\frac{rdx}{\sqrt{rr-xx}}$; adunque $Ff \times PQ$, elemento della

superficie, farà $= -rdx \sqrt{pp+\frac{rr+bx}{r}}$, formola che

$$\frac{1}{2} \sqrt{rr-xx}$$

fin' ora non si fa ridurre alle note quadrature di circolo, o dell'iperbola, perchè non si può liberare da' segni radicali, come si è veduto al num. 38., e come ci è pure occorso nel volere rettificare l'ellissi.

Ricorrendo alla serie: si riduca in serie infinita il numeratore, e lo stesso si faccia del denominatore, indi si proceda nello stesso modo, come si è fatto nella seconda maniera intorno all'ellissi nell'Esempio 20. num. 112.

ESEMPIO XL.

134. Sia l'emisfero, il di cui semicircolo generatore CDK , (Fig. 32.) che s'aggiri attorno al raggio DB , e sia $DB=a$, una qualunque $DA=x$, farà

rà $AE = y = \sqrt{2ax - xx}$, e però $dy = \frac{a - x}{2ax - xx} \times dx$;

e fatte le sostituzioni nella formola generale, sarà essa $= \frac{cax}{r}$, ed integrando $\frac{cax}{r} =$ alla superficie del seg-

mento di sfera generato dall'arco EDM ; e fatta $x = a$, sarà $\frac{caa}{r}$ la superficie dell'emisfero, e però $\frac{2caa}{r}$ la su-

perficie di tutta la sfera. Sarà adunque la superficie d'un qualunque segmento eguale al prodotto della periferia del circolo generatore della sfera nell'altezza di esso segmento; dell'emisfero, eguale al rettangolo della stessa periferia nel raggio; e della sfera, eguale al rettangolo della periferia nel diametro, e però esse superficie tra loro nella ragione, che hanno l'altezza, il raggio, ed il diametro.

E perchè l'area del circolo generatore della sfera è $\frac{caa}{2r}$, sarà la superficie della sfera ad essa area :: 4, 1, cioè quadrupla del massimo circolo.

Ma poichè è pure la superficie del cilindro (non comprese le basi) circoscritto all'emisfero, eguale al prodotto della periferia della base nell'altezza, sarà dunque $= \frac{caa}{r}$, ed in conseguenza essa superficie eguale alla superficie dell'emisfero. Ma il cono inscritto nell'

emis-

emisfero à pure la superficie $= \frac{c^3 \sqrt{211}}{27}$, dunque farà la superficie del cilindro, o dell'emisfero alla superficie del cono inscritto, come $2a$, $\sqrt{2aa}$, cioè a dire, come il diametro al lato del cono ec.

E S E M P I O X L I.

135. Si muova la parabola ACO dell'equazione $ax = yy$ attorno all'asse AM (*Fig. 33.*). Sarà dunque $adx = 2ydy$, e $dx^2 = \frac{4yy \cdot dy^2}{aa}$; e però, la formola, fatta

la sostituzione, $\frac{cydy}{ar} \sqrt{4yy + aa}$, ed integrando,

$\frac{c}{117a} \times \frac{4yy + aa^{\frac{3}{2}}}{2} =$ alla superficie del conoide parabolico indefinito, eguale alla quarta proporzionale di $6a$, $\sqrt{4yy + aa}$, e dell'area del circolo del raggio $= \sqrt{4yy + aa}$.

136. Sia più generalmente $\frac{x^2}{i} = y$ l'equazione della parabola ACO (*Fig. 33.*) con l'assissa $AB = x$, e coll'applicata $BC = y$, la qual'equazione per lo trilineo

bb

ACD

ACD farà $x^{\frac{1}{2}} = y$, se si prenda $AD = x$ siccome affissa, e $DC = y$ siccome ordinata. Al num. 119. Esempio 27. si è veduto, essere l'elemento della curva, il quale chiamo $du = \frac{dx}{x^{2t-2} + 1}^{-\frac{1}{2}}$, e la formola differenziale per le superficie è $\frac{cydu}{r}$, dunque farà $\frac{cydu}{r} =$

$$\frac{cydx}{r \times x^{2t-2} + 1}^{-\frac{1}{2}}; \text{ ma è, per l'equazione locale, } \frac{cydx}{r \times x^{2t-2} + 1}^{-\frac{1}{2}} = \frac{cx^t dx}{rt \times x^{2t-2} + 1}^{-\frac{1}{2}}.$$

Per procedere alle integrazioni, o quadrature mi fervirò del metodo spiegato al num. 61., e posto in uso nel suddetto Esempio 27., ma prima si offervi, che essendo c la periferia del circolo, il di cui raggio r , l'integrale $\int \frac{cydu}{r}$ ci dà la superficie del conoide; ma

se c farà una qualunque data retta, si averà la misura della superficie dell'ugna, quando cioè eretta sulla base CAB una cilindroide, questa viene tagliata da un piano, che passa per l'asse AB , e forma con la base sottoposta CAB un'angolo, il di cui seno retto a quello del complemento sia, come la c alla r . Le superficie

cie unguolari adunque stanno a quelle del solido rotondo, come una data retta alla circonferenza c .

Operando adunque, come nel citato num. 61. è stato spiegato, affinchè la nostra formola sia algebricamente integrabile, o riducibile alle note quadrature, troveremo dover essere $t = \frac{3+2b}{1+2b}$, o pure $t = \frac{b+1}{b+2}$,

intendendo per b un qualunque numero intiero positivo, o negativo.

La prima condizione, cioè $t = \frac{3+2b}{1+2b}$, posto b

numero intiero prima positivo, e poi negativo, ci dà le due progressioni

$$\text{I. } t = \frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9} \text{ ec.}$$

$$\text{II. } t = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{9}{11} \text{ ec.}$$

La seconda condizione, cioè $t = \frac{b+1}{b+2}$, posto b nume-

ro intiero prima positivo, poi negativo, ci dà le due altre progressioni

$$\text{III. } t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \text{ ec.}$$

$$\text{IV. } t = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \text{ ec.}$$

bb 2

Sog-

Soggiungo alcune brève osservazioni.

I. Siccome le due progredizioni prima, e terza abbracciano gli esponenti di tutte quelle parabole, che aggirandosi intorno all'asse generano conoidi, la superficie de' quali è analiticamente quadrabile, supposta soltanto la rettificazione della periferia circolare, e conseguentemente tutte le unghie sopra descritte di data altezza ammettono una quadratura algebrica; così ne' casi della serie seconda, e quarta ci vuole qualche cosa di più, e c'entra il tetragonismo dell'iperbola.

II. E' notabile, che paragonando insieme la serie prima con la seconda, e la terza con la quarta, gli esponenti sono inversi, ed appartengono alla medesima curva. Ciò significa, che potendosi girare l'area parabolica o intorno l'asse AB , o intorno l'asse AD , e producendosi nell'uno, e nell'altro caso superficie affatto diverse, se nel primo si genera una superficie assolutamente quadrabile, almeno considerata nell'unghie; nel secondo tutto all'opposto, essendo reciprochi i valori, nascono le superficie suddette ipoteticamente quadrabili. Per esempio il conoide formato dalla prima parabola cubica arruotata intorno AD ci somministra quadrabile algebricamente la superficie dell'unghie, ed anche quella del solido rotondo, mentre si abbia una linea retta eguale alla circonferenza. Ma se s'aggiri intorno all'asse AB , si richieggono le quadrature. Nella
para-

parabola seconda cubica succede lo stesso ; e tutto all'opposto nella apolloniana .

III. Confrontando queste serie con quelle del num. 119. si scorge , che fra queste nessuna parabola della prima , o seconda serie è rettificabile nè analiticamente , nè per via delle note quadrature ; quelle all'opposto della seconda , e quarta sono tutte rettificabili , ed abbracciano tutte le contenute nelle progressioni comprese nel citato num. 119.

IV. Fra le iperbole la sola comune tra gli asintoti ammette la superficie riducibile alla quadratura della stessa iperbola , perchè altro esponente negativo non ci si affaccia nelle citate progressioni , salvo che -1 .

V. Gli esponenti , che non si trovano nelle dette serie , come $z = 4, 5, 6$ ec. $\frac{2}{5}, \frac{5}{7}$ ec. vogliono qua-

drature più alte per misurare le superficie conoidali indi nascenti .

ESEMPIO XLII.

137. Sia l'ellissi ADC , (*Fig. 28.*) che si muova attorno all'asse AC , e sia $AB = a$, $BD = b$, $AE = x$, $EO = y$, e l'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$.

Sarà

Sarà dunque, differenziando, $dx = \frac{a y dy}{b b \times a - x}$, e pe-

rò $dx^2 = \frac{a^2 y y dy^2}{b^4 \times a - x^2}$; e ponendo in luogo di $-2ax + xx$

il valore $-\frac{a a y y}{b b}$ dato dall'equazione, sarà $dx^2 =$

$\frac{a a y y dy^2}{b b \times b b - y y}$. Adunque sostituito questo valore nella

formola generale, la troveremo essere

$\frac{c y dy \sqrt{b^2 + a y y - b b y y}}{r b \sqrt{b b - y y}}$, e fatta per brevità $aa - bb = ff$,

supposta a maggiore di b , cioè che l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, sia il maggiore, (se fosse a minore di b si farebbe $aa - bb = -ff$) sarà $\frac{c y dy \sqrt{b^2 + ff y y}}{r b \sqrt{b b - y y}}$ for-

mola, che per le cose dette a suo luogo si potrà liberare dai radicali, ed il di cui integrale per mezzo del canone del num. 56. troveremo dipendere dalla quadratura del circolo. Ma se sarà a minore di b , cioè l'asse, attorno cui s'aggira l'ellissi, il minore, la superficie dello sferoide dipenderà d'ambe le quadrature, cioè dalla circolare, e dall'iperbolica. La superficie poi dell'ugna nel primo caso è eguale ad una porzione di spazio ellittico, che si determina facilmente per via

delle

delle normali alla curva ; ma nel secondo caso appunto queste normali ci danno uno spazio iperbolico eguale alla stessa superficie dell'ugna . Per vedere ciò chiaramente: sia la curva ACF , (*Fig. 42.*) su cui s'intenda eretta una cilindroide, che venga tagliata da un piano, il quale passi per l'asse AB , e formi col sottoposto piano CAB un'angolo semiretto, egli è manifesto, che chiamato du l'elemento della curva, sarà $\int y du$ la superficie dell'ugna inferiore, e $\int \frac{cy du}{r}$ la superficie del co-

noide nascente dal girarsi la figura CAB intorno l'asse AB , e però sarà la superficie dell'ugna a quella del conoide, come il raggio alla circonferenza del circolo.

Ora sieno le due ordinate BC , DF infinitamente prossime, e condotta al punto F la normale FG , si metta essa in DH , e faccia figura di applicata della nuova curva MIH delineata col metodo prescritto: dico, che l'area $MABI$ è eguale alla superficie dell'ugna, che à per base l'arco AC .

I due triangoli FCE , GFD sono simili, dunque sarà FC , $CE :: GF$, FD , e però $FD \times FC = GF \times CE = DH \times DB$. Ma $FD \times FC$ ($y du$) è l'elemento della superficie dell'ugna; ed $HD \times DB$ è l'elemento dell'area $IMAB$, dunque essendo eguali questi elementi, lo faranno ancora i loro integrali, cioè

cioè le predette aree . Ciò premesso , sia la Figura ACB un quarto d'ellissi dell'equazione $\frac{aayy}{bb} = 2ax - xx$, farà

la normale $FG = \frac{b}{aa} \sqrt{2a^3x - aaxx + bbxx - 2abbx + aabb}$,

dunque chiamata z l'ordinata BI , farà $z =$

$\frac{b}{aa} \sqrt{xx - 2ax} \times \frac{bb}{bb} - aa + aabb$, equazione alla curva.

MIH , che appunto è un'altra ellissi quando sia a maggiore di b , cioè se AB sia l'asse maggiore dell'ellissi ACB ; ed all'incontro un'iperbola quando sia a minore di b , cioè AB l'asse minore .

Finalmente nel caso di mezzo, cioè quando l'ellissi degenera in circolo, già si fa, che la detta superficie dell'ugna è quadrabile, eguagliandosi ad un rettangolo .

ESEMPIO XLIII.

138. Sia l'iperbola BD , (*Fig. 29.*) che s'aggiri attorno all'asse trasverso BA . Sia A il centro, $BA = a$, AE semiasse conjugato $= b$, $AC = x$, $CD = y$; farà l'equazione $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, e però $y = \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$,

$dy = \frac{bxdx}{a\sqrt{xx - aa}}$, adunque la formola generale, fatte

le

le sostituzioni, farà

$$\frac{cb}{az} \sqrt{xx - aa} \sqrt{\frac{aaxxdx^2 + bbxxdx^2 - a^2dx^2}{az \times xx - aa}}, \text{ cioè}$$

$$\frac{cbdx}{az} \sqrt{aaxx + bbxx - a^2}, \text{ o sia, fatta } az + bb = ff,$$

$$\frac{cbfdx}{az} \sqrt{xx - \frac{a^2}{ff}}, \text{ il di cui integrale, quando si sia libe-}$$

rata dal segno radicale, troveremo dipendere medesimamente dalla quadratura dell'iperbola.

ESEMPIO XLIV.

139. Sia l'iperbola MD , (*Fig. 41.*) equilatera fra gl'asintoti, e si muova attorno all'asintoto AC , di cui l'equazione sia $ay + xy = aa$, essendo $AB = a$, $BC = x$, $CD = y$. Sarà dunque $x = \frac{ay}{y} - a$, e $dx^2 =$

$$\frac{a^2 dy^2}{y^4}; \text{ e però la formola generale farà, fatta la sostituzione, } \frac{cdy}{y^2} \sqrt{y^2 + a^2}.$$

Si faccia $\sqrt{y^2 + a^2} = z$, e però

$$y^2 = zz - a^2, \quad dy = \frac{zdz}{2y},$$

avremo trasformata la formola in quest'altra

$$\frac{czzdz}{2z \times zz - a^2}$$

c c libera

libera da' segni radicali, il di cui integrale dipende in parte da' logaritmi, come è facile a vedere. Adunque la ricercata superficie della nostra iperbola descritta, dipenderà dalla quadratura pure dell'iperbola.

ESEMPIO XLV.

140. Sia il solido generato dalla trattoria (Fig. 20.) ABF , come nel Esempio 36. num. 128., di cui si voglia la superficie. Nella formola generale $\frac{cytu}{r}$ (intendendo per du l'elemento della curva) sostituito in luogo di du il valore $-\frac{ady}{y}$ dato dall'equazione della curva, avremo $-\frac{acdy}{r}$, ed integrando $-\frac{acy}{r} + n$. Ma quando la superficie sia nulla, si à $y = a$; dunque la costante $n = \frac{aac}{r}$, e però l'integrale compito $\frac{aac}{r} - \frac{acy}{r}$ eguale alla superficie del solido generato dalla figura $AEDB$; e fatta $y = 0$, sarà $\frac{aac}{r}$ eguale alla superficie del solido infinitamente prodotto. Ma l'area del circolo, il di cui raggio $= \sqrt{2aa}$, si trova $= \frac{caa}{r}$, dunque la superficie del solido infinitamente prodotto è eguale all'

all'area del circolo, il di cui raggio sia la diagonale del quadrato di AE .

ESEMPIO XLVI.

141. Sia l'unghia $CNEODAC$, (Fig. 37.) di cui si cerchi la superficie. Denominando, come al num. 129, farà $QK = \frac{bx}{a} = MN$, ma Mi elemento della curva $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, adunque farà $\frac{bx}{a} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ eguale al quadrilineo infinitesimo $MimN$, elemento della superficie della metà dell'unghia.

Sia la curva DAC un semicircolo, farà in questo caso $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, e però la formola

$\frac{bx dx}{\sqrt{aa - xx}}$, ed integrando (per lo num. 31.) farà

$-b \sqrt{aa - xx} + f$, ma fatta $x = 0$, farà $f = ab$, adunque l'integrale compito si trova essere $ab - b \sqrt{aa - xx}$, e posta $x = a$, rispetto a tutta la superficie della metà dell'unghia, farà essa superficie $= ab$.

Sia la curva DAC la parabola dell'equazione $yy = a - x$, farà $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2}dx \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$, e però la formola $\frac{bx dx}{2a} \sqrt{\frac{4a - 4x + 1}{a - x}}$, il di cui integrale

dipende dalla quadratura dell'iperbola, adunque dalla stessa quadratura dipenderà la superficie dell'unguia.

ESEMPIO XLVII.

142. Sia il conoide parabolico generato dalla rotazione della parabola ADH con le coordinate in angolo obbliquo (Fig. 7.) attorno all'asse AC , la di cui equazione è $ax = yy$. Si sostituiscia nella formola delle superficie, che a questo caso compete, cioè nella formola $\frac{cay}{rm} \sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{2edxdy}{m}$ il valore di dx dato per dy dall'equazione differenziata della curva, e si trasformerà in quest'altra $\frac{2cnvdy}{arm} \sqrt{yy + \frac{aey}{m} + \frac{aa}{4}}$, il di cui integrale si trova essere in parte algebrico, ed in parte logaritmico.

143. Coerentemente al metodo esposto delle quadrature, rettificazioni ec. farebbe questo luogo oppor-

tuno

tuno per dare altresì le formole de' centri di gravità , di oscillazione , e di percussione , ma stimo meglio di ometterle , includendo esse necessariamente alcuni principj di Statica , dei quali non suppongo informati i miei Leggitori .



CAPO

C A P O I V.

*Del Calcolo delle Quantità Logaritmiche ,
ed Esponenziali .*

144. **Q**uantità esponenziali (giacchè altrove abbastanza è stato detto, cosa sieno le logaritmiche) si chiamano quelle , che sono elevate a qualunque potenza indeterminata ; tali sarebbero a^x , y^z ec., gli esponenti delle quali x , z sono quantità indeterminate , e però il calcolo , che versa sopra queste tali quantità , chiamasi calcolo esponenziale .

145. Ma di più gradi sono le quantità esponenziali ; si dicono del primo grado quelle , i di cui esponenti sono indeterminate ordinarie , come sono appunto le quantità a^x , y^z . Del secondo grado sono quelle , gli esponenti delle quali sono essi pure quantità esponenziali , come sarebbe a^{x^t} , y^{z^p} , intendendo la x elevata alla potenza t , e la z alla potenza p . Del terzo grado sono quelle , che hanno per esponente una quantità esponenziale del secondo grado , e così di mano in mano coll'istesso ordine .

146. Ma qui fa d'uopo richiamare a memoria ,
ciò ,

ciò , che è stato detto al num. 11. , cioè , che $\int \frac{ady}{y} = l y$ nella logaritmica della sottangente $= a$; adunque il differenziale di $l y$ farà $\frac{dy}{y}$ moltiplicato nella sottangente della logaritmica , in cui si prende il logaritmo ; così il differenziale di $l \sqrt{aa - xx}$ nella logaritmica della sottangente $= 1$ farà $-\frac{x dx}{aa - xx}$, e generalmente il differenziale d'una qualunque quantità logaritmica farà una formola composta del differenziale della quantità moltiplicata nella sottangente , e divisa per la quantità stessa .

147. Ciò posto: abbiassi da differenziare la quantità logaritmica $l^m x$ (la m è esponente del logaritmo) . Si ponga $l^m x = y^m$, adunque farà $l x = y$, e $\frac{dx}{x} = dy$; ma il differenziale di $l^m x$ farà $m y^{m-1} dy$, ed è $y^{m-1} = l^{m-1} x$; adunque sostituito il valore in luogo di y , e dy dato per x , farà il differenziale di $l^m x = m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$, supposta $= a$ la sottangente della logaritmica ; o pure $m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$, supposta essa sottangente $= 1$.

148. Che se fosse da differenziarsi $l^m x^n$; fat-

ta

ta $x^n = z$, farà $l^m z$, ed il differenziale farà $m l^{m-1} z \times \frac{dz}{z}$; ma $dz = nx^{n-1} dx$, adunque sostituendo, il differenziale della proposta formola $l^m x^n$ farà $nm l^{m-1} x^n \times \frac{dx}{x}$.

149. Abbiati da differenziare la formola $l l x$. Si ponga $l x = y$, e però $l l x = l y$; adunque farà $\frac{dx}{x} = dy$ nella logaritmica della sottangente $= 1$ (il che s'intende ogni qual volta esse sottangenti non siano espresse); ma poichè $l l x = l y$, il differenziale di $l l x$ farà $\frac{dy}{y}$; adunque posti in luogo di y , e di dy i valori dati per x , farà $\frac{dx}{x l x}$ il differenziale della proposta formola.

Ma più generalmente sia $l^m l x$ da differenziarsi. Pongo $l x = y$, e però $l^m l x = l^m y$, e $\frac{dx}{x} = dy$; ma il differenziale di $l^m y$ è $m l^{m-1} y \times \frac{dy}{y}$; adunque sostituiti i valori in luogo di y , e di dy dati per x , farà $m l^{m-1} l x \times \frac{dx}{x l x}$ il differenziale cercato.

Più generalmente ancora. Sia da differenziarsi $l^n l^m x$. Pongo $l^m x = y^m$, e però $l x = y$, e $\frac{dx}{x} = dy$; adun-

adunque farà $l^n l^m x = l^n y^m$. Ma il differenziale di $l^n y^m$ è $mn l^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y}$, adunque fatte le sostituzioni, farà $mn l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x l x}$ il differenziale cercato.

150. Quanto al modo di differenziare le quantità esponenziali. Sia la quantità z^x da differenziarsi. Pongo $z^x = t$, farà in conseguenza $l z^x = l t$, ma per lo num. 14. $l z^x = x l z$; adunque farà $x l z = l t$, e però differenziando $dx l z + \frac{x dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^x$, onde $dx l z + \frac{x dz}{z} = \frac{dt}{z^x}$, e finalmente $dt = z^x dx l z + x z^{x-1} dz$, differenziale cercato.

151. Sia da differenziarsi la quantità esponenziale del secondo grado z^{x^p} . Pongo $z^{x^p} = t$, adunque farà $x^p l z = l t$, e differenziando, il differenziale di $x^p \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma per lo num. antecedente, il differenziale di x^p sapiamo essere $x^p dpl x + p x^{p-1} dx$, adunque farà $x^p dpl x + p x^{p-1} dx \times l z + x^p \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}$, ma $t = z^{x^p}$, adunque farà $dt = z^{x^p} x^p dpl x l z + z^{x^p} p x^{p-1} dx l z + z^{x^p} z^{-1} x^p dz$, differenziale cercato.

Nello stesso modo si proceda intorno alle quantità esponenziali di qualunque altro grado.

d d

152.

152. Iteffamente fi averanno i differenziali delle quantità, che fono il prodotto di quantità esponenziali, per efempio di $x^p y^n$, imperocchè il differenziale di queffa farà il prodotto di x^p nel differenziale di y^n , con di più il differenziale di x^p in y^n ; ma i differenziali di x^p , ed y^n fi fanno trovare, adunque ec.

153. Dall'ordine, con cui procedono i differenziali logaritmici, fi poffono cavare alcune regole per la integrazione delle formole differenziali logaritmiche; ed in primo luogo que' canoni, che fervono per la integrazione delle quantità differenziali ordinarie, ferviranno ancora per le quantità differenziali logaritmiche a loro fimili, purchè queffe fieno in oltre divife per la variabile, e l'integrale di queffe farà lo fteffo dell'integrale di quelle, ponendo folo in queffe in luogo della incognita, o fua poteftà, il logaritmo, o poteftà del logaritmo dell'incognita fteffa, ed il tutto dividendo per la fottangente della logaritmica.

Così poichè l'integrale di $m x^{m-1} dx$ è x^m , farà pure $\frac{l^m x}{a}$ l'integrale di $m l^{m-1} x \times \frac{dx}{x}$.

Iteffamente poichè $\int x^{-1} dx = l x$, farà pure $\int l^{-1} x \times \frac{dx}{x}$, o fia $\int \frac{dx}{x} = l l x$, fuppofta la fottangente = 1.

E

E poichè $\int y dy \sqrt{aa + yy} = \frac{aa + yy^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$, farà pure

$$\int l y \sqrt{aa + l^2 y} \times \frac{dy}{y} = \frac{aa + l^2 y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}.$$

Sia da integrarsi $m l^{m-1} l x \times \frac{dx}{x l x}$. Pongo $l x = y$,

adunque $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, e fatta la sostituzione, farà $m l^{m-1} y \times \frac{dy}{y}$;

ma l'integrale di $m y^{m-1} dy$ si fa essere y^m , adunque l'integrale di $m l^{m-1} y \times \frac{dy}{y}$ farà $l^m y$; ma $y = l x$, e

però $l y = l l x$, e $l^m y = l^m l x$; adunque

$$\int m l^{m-1} l x \times \frac{dx}{x l x} = l^m l x.$$

Sia $n m l^{n-1} x^m \times \frac{dx}{x}$. Pongo $x^m = y$, e però

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{m x^{m-1}}; \text{ fatte le sostituzioni, farà}$$

$$n m l^{n-1} y \times \frac{dy}{m x^{m-1} \times x}, \text{ cioè } \frac{n m l^{n-1} y \times dy}{m y}, \text{ o sia}$$

$$n l^{n-1} y \times \frac{dy}{y}, \text{ il di cui integrale è } l^n y, \text{ adunque re-}$$

$$\text{stituito il valore di } y, \text{ farà } \int n m l^{n-1} x^m \times \frac{dx}{x} = l^n x^m.$$

Sia $n m l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x l x}$. Pongo $l x = y$, dun-

dd 2

que

che $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, e $l^m x = y^m$; fatta la sostituzione, sarà

$$nm l^{n-1} y^m \times \frac{dy}{y},$$
 ma l'integrale di questa è $l^n y^m$,
 adunque restituito il valore, sarà

$$\int nm l^{n-1} l^m x \times \frac{dx}{x l^m} = l^n l^m x.$$

154. A ciò aggiungo una regola generale per la
 integrazione della formola $y^m l^n y dy$, e dico, che sarà
 generalmente $\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - n y^{m+1} \frac{l^{n-1} y}{m+1}$

$$\frac{n \times \frac{y^{m+1} l^{n-1} y}{m+1} - a a l^{n-2} y}{m+1} -$$

$$\frac{n \times \frac{y^{m+1} l^{n-2} y}{m+1} - a^2 l^{n-3} y}{m+1} \text{ ec. , e così conti-}$$

novando in infinito con la stessa legge, che da se è
 manifesta.

Quindi se l'esponente n sarà un numero intiero,
 e positivo, è facile il vedere, che la serie s'interrom-
 perà, ed in conseguenza sarà dato in termini finiti l'in-
 tegrale della proposta formola.

Sia per cagione d'esempio $n=2$; sarà dunque
 $n-2=0$, e però sarà zero il coefficiente del quarto
 termine, e de' susseguenti, per essere ciascuno multi-
 plicato

plicato per $n-2$. Così se farà $n=3$, s'interromperà la serie nel quinto termine; e così degl'altri ec.

Sia $n=2$, $m=1$, onde la formola d'integrarsi sia $y l^2 y dy$; sarà adunque zero il quarto termine, ed ognuno de' susseguenti, e però l'integrale sarà

$$\frac{y y l^2 y}{2} - \frac{2 y y a l y}{4} + \frac{2 y y a a}{6}, \text{ cioè } \frac{2 y y l^2 y}{2} - \frac{2 a y y l y}{4} + \frac{a a y y}{6}.$$

Che se fosse $m=-1$, farebbe inutile la serie, perchè farebbe $m+1=0$, il che rende infinito ciascun termine, ma in questo caso non v'è bisogno della serie, giacchè si fanno integrare queste formole per le cose dette di sopra.

Rimane, che di tale regola se ne dia la dimostrazione; per lo che fare si ponga $ly=z$, e però $\frac{ady}{y}=dz$;

farà adunque, fatta la sostituzione, $y^m l^n y dy = y^m z^n dy$; ma $y^m z^n dy = y^m z^n dy + \frac{n}{m+1} y^{m+1} z^{n-1} dz -$

$$\frac{n}{m+1} y^m z^{n-1} ady - \frac{n \times \frac{n-1}{m+1} \times y^{m+1} z^{n-2} adz +$$

$\frac{n \times \frac{n-1}{m+1} \times y^m z^{n-2} aady$ ec., e così in infinito, perchè in questa guisa ciascun termine, toltone il primo, si distrugge dall'immediatamente susseguente, appunto per

per essere $dz = \frac{ady}{y}$. Ora poichè questa tal serie infini-

ta è integrabile, prendendo i termini a due a due, imperciocchè l'integrale del primo, e secondo termine è $\frac{y^{m+1}z^n}{m+1}$; del terzo, e quarto è $-\frac{any^{m+1}z^{n-1}}{m+1}$;

del quinto, e sesto è $\frac{aan \times n-1 \times y^{m+1}z^{n-2}}{m+1}$, e

così di mano in mano; restituito in questi integrali ly in luogo di z , troveremo finalmente essere

$$\int y^m l^n y dy = \frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{any^{m+1} l^{n-1} y}{m+1} + \frac{aan \times n-1 \times y^{m+1} l^{n-2} y}{m+1} - \frac{a^2 n \times n-1 \times n-2 y^{m+1} l^{n-3} y}{m+1} + \dots$$

155. L'artificio, con cui si ritrova la suddetta serie, può essere il seguente.

M'immagino, che l'integrale di $y^m l^n y dy$ sia $\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1}$, quale appunto farebbe, se $l^n y$ non fosse

quantità variabile, ma posta la sottangente $= a$, il differenziale di esso integrale è $y^m l^n y dy + \frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$,

il quale si trova maggiore della proposta formola, quan-

to

to è $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$; adunque l'integrale assunto è mag-

giore del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{ny a l^{n-1} y dy}{m+1}$,

e però l'integrale di questo si dovrà sottrarre dall'integrale supposto.

* E qui di nuovo m'immagino, che l'integrale di $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ sia $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1}$, onde l'integrale

della proposta formola venga ad essere $\frac{y^{m+1} l^n - ny^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1}$. Ma differenziando

$\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1}$, si à $\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1} +$

$n \times \frac{y^{m+1} l^{n-1} y}{m+1}$; adunque l'integrale di

$\frac{ny^m a l^{n-1} y dy}{m+1}$ non è $\frac{ny^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1}$, ma è maggiore

del dovere, quanto è l'integrale di $\frac{n \times y^{m+1} l^{n-1} y}{m+1}$,

adunque si è sottratto troppo; e però bisognerà aggiungere questo integrale, il quale nuovamente m'im-

ma-

magino, che sia $\frac{n \times n-1 \times y^{m+1} a a l^{n-1} y}{m+1}$, adun-

que farebbe l'integrale della proposta formola

$$\frac{y^{m+1} l^n y}{m+1} - \frac{n y^{m+1} a l^{n-1} y}{m+1} + \frac{n \times n-1 \times y^{m+1} a a l^{n-1} y}{m+1} \text{ ec.,}$$

e così con lo stesso ordine procedendo si continuerà la serie in infinito.*

156. Si possono anco avere gl'integrali delle formole differenziali logaritmiche per via di serie, che non contengano quantità logaritmiche, ma sole ordinarie, le quali serie però non s'interrompono mai, e sono sempre infinite.

Sia adunque da integrarsi $x/x \times dx$. Pongo $x = z + a$, sostituendo sarà $\frac{z+a}{z+a} \times dz$, ma per lo num. 70: $\frac{1}{z+a} = \frac{z}{a} - \frac{zz}{2aa} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} \text{ ec.}$, supposta la sottrazione = 1, facendo adunque l'attuale moltiplica, avremo $\frac{z+a}{z+a} \times dz =$

$$\begin{aligned} & z dz + \frac{z^2 dz}{a} - \frac{z^3 dz}{2aa} + \frac{z^4 dz}{3a^3} - \frac{z^5 dz}{4a^4} \text{ ec.} \\ & - \frac{zz dz}{2a} + \frac{z^3 dz}{3aa} - \frac{z^4 dz}{4a^3} + \frac{z^5 dz}{5a^4} \end{aligned}$$

cioè

cioè $zdz + \frac{zzdz}{2a} - \frac{z^2dz}{6aa} + \frac{z^3dz}{12a^3} - \frac{z^4dz}{20a^4}$ ec., ed integran-

do farà $\frac{zz}{2} + \frac{z^3}{6a} - \frac{z^4}{24aa} + \frac{z^5}{60a^3} - \frac{z^6}{120a^4}$ ec. =

$$\int \frac{z}{z+a} \frac{1}{z+a} \times dz.$$

Che se la formola fosse $x^m \log x$, cioè

$\frac{z^m}{z+a} \frac{1}{z+a} \times dz$, si dovrebbe moltiplicare la serie

esprimente il logaritmo nella potenza $\frac{1}{z+a}$. E se di più fosse anco il logaritmo elevato a potenza, come a dire $x^m \log^n x$, cioè $\frac{z^m}{z+a} \frac{1}{z+a} \times dz$, bisognerebbe in oltre elevare alla potenza n la serie infinita, che esprime esso logaritmo, e fare il rimanente come sopra.

157. Le equazioni o formole differenziali affette da quantità logaritmiche bene spesso ammettono integrazioni, che sono geometriche, e dipendono da quadrature di spazj curvilinei, che facilmente si descrivono, supposta la logistica. Eccone alcuni esempj scelti fra i più semplici.

Sia l'equazione $dy \log y = dx$, e nella logaritmica descritta (Fig. 42.) pongasi $CD = y$, e presa la sottangente per unità, avremo AC , o $HD = \log y$; onde il rettangolo infinitesimo DG , la di cui base $GH = FE = dy$, farà $= dy \log y$, ma quello rettangolo si è l'elemento

c c

dell'

dell'area crescente BDH , dunque la somma $\int dy \, l \, y$ è eguale alla detta area BDH .

Di fatto l'area stessa si eguaglia al rettangolo AD meno lo spazio logaritmico $ABDC$; ma questo spazio, siccome è noto, si misura dal rettangolo $AB \times CD = y$, dunque l'area $BDH = \int dy \, l \, y = y \, l \, y - y$, siccome pure può trovarsi per via d'analisi.

Considero un'altra formola $dy \, l^2 y = dx$. Il primo membro altro non è, che il solido generato dalla rivoluzione HG moltiplicata nel quadrato dell'ordinata GF , il qual solido è analogo all'elemento del conoide generato dall'area BDH girata attorno l'asse BG , dunque l'integrale $\int dy \, l^2 y = y \, l^2 y - 2y \, l \, y + 2y$ sta al detto conoide in data ragione.

Più generalmente abbiassi $dy \, l^m y$. Alzata l'applicata HD alla potestà m (essendo l'indice m un numero affermativo, o negativo, intero, o rotto) basterà, che l'ordinata HM facciafi eguale alla dignità $\overline{HD}^m$, e che per lo punto M , ed altri infiniti in simil maniera determinati passi la curva BMN , per conseguire, che l'area $BMH = \int MH \times dy$ sia eguale, o analoga all'integrale $\int dy \, l^m y$.

Mag-

Maggiore difficoltà non si incontra quando anche nella espressione ci si parano avanti i logaritmi dei logaritmi. Propongasi $dy lly = dx$; giacchè AC è il logaritmo di CD , se si adatterà nella logistica la nuova applicata IL eguale all'affissa AC , farà AI il logaritmo di IL , e conseguentemente il logaritmo del logaritmo della CD . Si proroghi la retta IL fin a tanto, che tagli la HD parallela, ed eguale ad AC nel punto K , per cui, ed altri infiniti similmente determinati passi una nuova curva delineata relativamente alla logistica: dico, che la quadratura dello spazio spettante ad essa curva ci dà l'integrale della formola $dy lly = dx$.

In altro modo: piglio la differenza della quantità $y lly$, cioè $dy lly + \frac{dy}{ly}$, ed aggiunto nella nostra espressione da ambo le parti il termine $\frac{dy}{ly}$, si à $dy lly +$

$\frac{dy}{ly} = dx + \frac{dy}{ly}$, ed integrando, $y lly = x + \int \frac{dy}{ly}$. Posta dunque all'affissa AH l'ordinata corrispondente in ragion reciproca di $HD = ly$, nascerà una curva, il di cui tetragonismo esprimerà l'integrale $\int \frac{dy}{ly}$. E ciò

basterà, onde si veggia l'andamento del metodo.

158. Passerò ora alle integrazioni delle formole

cc 2

dif-

differenziali, che contengono quantità esponenziali; e sia da integrarsi $x^x dx$. Pongo $x = 1 + y$, (prendo l'unità per una qualunque costante) sarà dunque $x^x dx = \overline{1+y}^{1+y} dy$; ciò posto, faccio in oltre $\overline{1+y}^{1+y} = 1 + u$, adunque sarà $\overline{1+y} \log \overline{1+y} = \log 1 + u$, e però convertiti in serie pel num. 70. i due logaritmi, e fatta l'attual moltiplica per $1 + y$ della prima serie, averassi $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{12} - \frac{y^5}{20}$ ec. = $u - \frac{uu}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$ ec. Indi faccio una equazione fittizia, e suppongo, che sia

$$u = y + Ayy + By^3 + Cy^4 + Dy^5 \text{ ec. ;}$$

(A, B, C, D ec. sono quantità da determinarsi)
e però

$$uu = yy + 2Ay^3 + AAy^4 + 2ABy^5 + BBy^6 \text{ ec.} \\ + 2By^4 + 2Cy^5 + Dy^6$$

$$u^3 = y^3 + 3Ay^4 + 3AAy^5 \text{ ec.} \\ + 3By^5$$

$$u^4 = y^4 + 4Ay^5 \text{ ec.}$$

$$u^5 = y^5 \text{ ec.,}$$

adun-

adunque sarà $u = \frac{uu}{2} + \frac{u^1}{3} - \frac{u^2}{4} + \frac{u^3}{5}$ cc. =

$$y + Ayy + By^1 + Cy^2 + Dy^3 \text{ cc.}$$

$$- \frac{1}{2}yy - Ay^1 - \frac{1}{2}AAy^2 - ABy^3 \text{ cc.}$$

$$- By^2 - Cy^3 \text{ cc.}$$

$$+ \frac{1}{3}y^3 + Ay^2 + AAy^3 \text{ cc.}$$

$$+ By^3 \text{ cc.}$$

$$- \frac{1}{4}y^4 - Ay^3 \text{ cc.}$$

$$+ \frac{1}{5}y^5 \text{ cc.}$$

Ma poichè $u = \frac{1}{2}uu + \frac{1}{3}u^1 - \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{5}u^3$ cc.

= $y + \frac{yy}{2} - \frac{y^1}{6} + \frac{y^2}{12} - \frac{y^3}{20}$ cc., sarà

$$y + Ayy + By^1 + Cy^2 + Dy^3 \text{ cc.}$$

$$- \frac{1}{2}yy - Ay^1 + \frac{1}{2}AAy^2 - ABy^3 \text{ cc.}$$

$$- By^2 - Cy^3 \text{ cc.} = y + \frac{yy}{2} - \frac{y^1}{6} + \frac{y^2}{12} - \frac{y^3}{20} \text{ cc.}$$

$$+ \frac{1}{3}y^3 + Ay^2 + AAy^3 \text{ cc.}$$

$$+ By^3 \text{ cc.}$$

$$- \frac{1}{4}y^4 - Ay^3 \text{ cc.}$$

$$+ \frac{1}{5}y^5 \text{ cc.}$$

E riducendo l'equazione al zero, farà

$$y + Ayy + By' + Cy^4 + Dy' \text{ ec.}$$

$$-\frac{1}{2}yy - Ay' - \frac{1}{2}AAy^4 - AB y' \text{ ec.}$$

$$- By^4 - Cy' \text{ ec.}$$

$$+\frac{1}{3}y' + Ay^4 + AAy' \text{ ec.} = 0.$$

$$+ By' \text{ ec.}$$

$$-\frac{1}{4}y^4 - Ay' \text{ ec.}$$

$$+\frac{1}{5}y' \text{ ec.}$$

$$-y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{12} + \frac{y^7}{20} \text{ ec.}$$

Quindi dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle affunte A, B, C ec.,

che faranno $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = \frac{1}{12}$. Adun-

que, posti questi valori in luogo delle majuscole, avere-

mo $1 + u = 1 + y' + y = 1 + y + yy + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y' \text{ ec.}$,

onde

$$1 + y' + y dy \geq dy + ydy + yydy + \frac{1}{2}y' dy + \frac{1}{3}y^4 dy + \frac{1}{12}y' dy \text{ ec.}$$

ed integrando, farà finalmente

$$\int 1 + y' + y dy = y + \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{15} + \frac{y^6}{72} \text{ ec.}$$

159. In altra maniera ancora si troverà l'integra-

le

le della formola $x^x dx$. Pongo $x^x = 1 + y$, adunque
 $x l x = l \overline{1 + y}$; riduco in serie $l \overline{1 + y}$, e farà
 $l \overline{1 + y} = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^4}{5}$ ec.

Ciò posto, fingo $y = l \overline{1 + y} + A l' \overline{1 + y} + B l'' \overline{1 + y} +$
 $C l''' \overline{1 + y} + D l^{(4)} \overline{1 + y}$ ec., (A, B, C, D ec. sono quantità
da determinarsi) adunque farà

$$y = l \overline{1 + y} + A l' \overline{1 + y} + B l'' \overline{1 + y} + C l''' \overline{1 + y} + D l^{(4)} \overline{1 + y}$$
 ec.

$$yy = l^2 \overline{1 + y} + 2 A l' \overline{1 + y} + A A l'' \overline{1 + y} + 2 A B l'' \overline{1 + y}$$
 ec.
 $+ 2 B l' \overline{1 + y} + 2 C l' \overline{1 + y}$ ec.

$$y^3 = l^3 \overline{1 + y} + 3 A l' \overline{1 + y} + 3 A A l'' \overline{1 + y}$$
 ec.
 $+ 3 B l' \overline{1 + y}$ ec.

$$y^4 = l^4 \overline{1 + y} + 4 A l' \overline{1 + y}$$
 ec.

$$y^5 = l^5 \overline{1 + y}$$
 ec.,

e però $y - \frac{yy}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^4}{5}$ ec., cioè

$$l \overline{1 + y} = l \overline{1 + y} + A l' \overline{1 + y} + B l'' \overline{1 + y} + C l''' \overline{1 + y} + D l^{(4)} \overline{1 + y}$$
 ec.
 $- \frac{1}{2} l^2 \overline{1 + y} - A l' \overline{1 + y} - \frac{1}{2} A A l'' \overline{1 + y} - A B l'' \overline{1 + y}$ ec.
 $- B l' \overline{1 + y} - C l' \overline{1 + y}$ ec.
 $+ \frac{1}{3} l^3 \overline{1 + y} + A l' \overline{1 + y} + A A l'' \overline{1 + y}$ ec.
 $+ B l' \overline{1 + y}$ ec.
 $- \frac{1}{4} l^4 \overline{1 + y} - A l' \overline{1 + y}$ ec.
 $+ \frac{1}{5} l^5 \overline{1 + y}$ ec.

Quindi

Quindi riducendo l'equazione al zero, dal paragone al zero de' primi, secondi, terzi ec. termini troveremo il valore delle assunte A, B, C, D , ec., cioè $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}, C = \frac{1}{24}, D = \frac{1}{120}$ ec., onde farà

$$1+y = 1 + l \overline{1+y} + \frac{1}{2} l^2 \overline{1+y} + \frac{1}{6} l^3 \overline{1+y} + \frac{1}{24} l^4 \overline{1+y} + \frac{1}{120} l^5 \overline{1+y} \text{ ec.}$$

ma $l \overline{1+y} = x l x$, ed $1+y = x^x$; adunque fatte le sostituzioni, e moltiplicando per dx , farà $x^x dx = dx +$

$$x dx l x + \frac{1}{2} x x dx l^2 x + \frac{1}{6} x^3 dx l^3 x + \frac{1}{24} x^4 dx l^4 x + \frac{1}{120} x^5 dx l^5 x \text{ ec.}$$

ed integrando con le note regole di sopra spiegate, farà finalmente $\int x^x dx = x + \frac{x x l x}{2} - \frac{x x}{4} + \frac{x^3 l^2 x}{6} -$

$$\frac{x^3 l x}{9} + \frac{x^4}{27} - \frac{x^4 l x}{24} + \frac{x^5 l^2 x}{12} + \frac{x^5 l x}{64} - \frac{x^6}{256} \text{ ec.}$$

160. Ma per dire in oltre alcuna cosa intorno alla costruzione delle curve espresse da equazioni logarithmiche, ed esponenziali. Debbaſi in primo luogo descrivere la

curva dell'equazione $x = l^{\frac{1}{a}} y$: ſia BD (*Fig. 43.*) la

logritmica, in cui ſi prendano i logarithmi della propoſta equazione, la di cui ſottangente ſia, per eſempio, $= a = AB$; ciò poſto, preſa $y = a = AB$, il logarithmo di y farà $= 0$, e però $x = 0$; adunque fatta (*Fig. 44.*)

$$MN =$$

$MN=y=a$, farà N un punto nella curva. Prefa y minore

di AB , farà ly quantità negativa, e però $l^{\frac{1}{2}}y$ quantità immaginaria, per effere il 2 indice pari di radice di quantità negativa, onde x farà immaginaria ogni qual volta sia y minore di a . Prefa y maggiore di AB per esempio $=CD$, farà $AC=ly$; ma per l'equa-

zione data, è $a^{\frac{1}{2}}, l^{\frac{1}{2}}y :: ly, x$, cioè $a, \sqrt{aly} :: ly, x$; adunque fatta $MP=CD$, se prenderassi PH eguale alla quarta proporzionale di AB , della media tra AB , ed AC , e della stessa AC , farà essa $=x$, ed il punto H nella curva. In quello modo si troveranno quanti punti si vogliono, e descriverassi la curva, la quale anderà in infinito, come è facile a conoscere.

Per avere la sottangente della data curva, prendo la formola differenziale $y \frac{dx}{dy}$ delle sottangenti; diffe-

renzio l'equazione della data curva, e trovo $dx = \frac{1}{2} l^{\frac{1}{2}-2} y \times \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} dy$; fatta la sostituzione in luogo di dx ,

averassi essa sottangente $= \frac{1}{2} l^{\frac{1}{2}} y \times a^{\frac{1}{2}} = \frac{3ax}{2ly}$

$$\frac{3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{2}$$

ff

Averà

Averà pure la nostra curva un flesso contrario, per ritrovare il quale prendo le seconde differenze della data equazione, supposta dx costante, e ritrovo

$$\frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y \times ddy + \frac{3}{4} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y - \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y}{yy} = 0,$$

e però $ddy = \frac{\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y}{\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} y l^{\frac{1}{2}} y}$; ma per lo

metodo de' flessi contrarj, deve essere $ddy = 0$; adun-

que sarà $\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{\frac{1}{2}} y - \frac{3}{4} a^{\frac{1}{2}} dy^2 l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè

$l^{\frac{1}{2}} y - \frac{1}{2} a l^{-\frac{1}{2}} y = 0$, cioè $ly = \frac{1}{2} a$, farà adunque il flesso contrario allora quando sia $ly = \frac{a}{2}$.

Se la proposta curva da descriversi sarà $x lx = y$, risolta l'equazione in analogia, farà $1, lx :: x, y$, e si costruirà in simil modo.

E se fosse $xx lx = y$, o pure $x^3 lx = y$, o $x^{\frac{1}{n}} lx = y$, o più generalmente $x^n lx = y$, essendo n una qualunque potestà intiera o rotta di x ; risolta istessamente l'equazione nell'analogia $1, lx :: x^n, y$, e presa nella logaritmica una qualunque $CD = x$, onde sia

$$AC =$$

$AC=lx$; il multiplo di AC secondo il numero n , se è intero; il submultiplo, se è rotto, ci darà la corrispondente ordinata nella logaritmica stessa, che sarà x^n , per la proprietà della logaritmica.

Che se la curva contenesse quantità, che fossero il logaritmo di logaritmo, come se fosse $x^n llx=y$, facilmente si averebbe nella logaritmica la linea espressa per llx prendendo una qualunque $CD=x$ (Fig. 43.), onde sia $AC=lx$, ed indi posta AC per ordinata in (ac) ; imperocchè sarà Aa il logaritmo di (ac) , cioè llx , come ancora è stato avvertito al num. 157.

161. Debba si costruire la curva esponenziale dell'equazione $x^x=y$. Adunque prendendo i logaritmi, sarà $x lx = ly$. Però descritta (Fig. 45.) la logaritmica PAB con la sottangente $AD=1$, e presa una qualunque $CB=DE=x$, sarà $DC=lx$; adunque poichè l'equazione si risolve nell'analogia $1, x :: lx, ly$, il quarto proporzionale di AD, BC , e DC , che sia per esempio DM , sarà ly ; adunque $MN=y$, e però se farassi $EF=MN$, sarà $DE=x, EF=y$, ed F un punto della curva da descriversi.

La curva taglierà l'asintoto HM in H , fatta $DH=DA$; imperocchè posta $x=0$, sarà $ly=0$, cioè y eguale alla sottangente DA . Similmente posta $x=1=DA$, sarà $lx=0$, e però $ly=0$, cioè $y=DA$; fatta adunque $AG=DH$, sarà G un punto in curva.

ff 2

Dal

Dal punto H alzando l'applicata HP alla logaritmica, e conducendo POR parallela ad HD , farà OR la minima ordinata y alla curva. Imperciocchè differenziando l'equazione, farà $dx + dx \log x = \frac{dy}{y}$, cioè $yx + ydx \log x = dy$, ma per lo metodo de' massimi, e minimi, deve essere $dy = 0$, adunque $yx + ydx \log x = 0$, e però $-\log x = 1 = HD = DA$.

Essendo $\frac{ydx}{dy}$ la formola generale della sottangente, e dall'equazione data della curva avendosi $dx = \frac{dy}{y \times 1 + \log x}$, sostituito questo valore nella formola, farà la sottangente per un qualunque punto della curva $= \frac{1}{1 + \log x}$,

punto G , rispetto a cui è $x = AD$, ed in conseguenza $\log x = 0$, farà la sottangente $= 1 = AD$, sottangente della logaritmica.

Rispetto allo spazio: prendo la formola generale ydx ; ma $y = x^x$, equazione della curva, sostituito adunque nella formola il valore di y , farà $x^x dx$, e però $\int x^x dx$ lo spazio indefinito $HOFEADH$, il quale, integrando per lo num. 159., farà =

$$x + \frac{x x \log x}{2} - \frac{x x}{4} + \frac{x^2 \log^2 x}{6} - \frac{x^2 \log x}{9} + \frac{x^3}{27} + \frac{x^4 \log x}{24} - \frac{x^4 \log^2 x}{12} + \frac{x^5 \log x}{60} \text{ ecc.}$$

E presa $x = AD = 1$, farà $lx = 0$, e però lo spazio
 $HOGAD = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256}$ cc. ,

cioè $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ cc.

162. Sia la curva dell' equazione $xy = a$, farà
 $ylx = la$, e però si potrà costruire per mezzo della
 logaritmica. Differenziando l' equazione $ylx = la$, ave-
 remo $\frac{ydx}{x} + dylx = 0$ (presa la sottangente della loga-
 ritmica $= 1$), e però farà $dx = - \frac{x l x dy}{y}$, adunque
 la sottangente $= - x l x$.

163. Sia $x^x = a^y$; adunque $x l x = y l a$, che si
 potrà costruire al solito. Prese le differenze, farà
 $dx + d x l x = d y l a$, e però la sottangente $= \frac{x l x}{1 + l x}$.

Ma poichè $y = \frac{x l x}{l a}$, farà $y dx$, cioè l' elemento
 dello spazio $= \frac{x l x \times dx}{l a}$, ed integrando per lo num. 154.,

$$\frac{2 x x l x - x x}{4 l a} .$$

164. Altre questioni ancora possono proporfi ap-
 partenenti ad equazioni esponenziali; come, per esem-
 pio, nelle equazioni esponenziali composte di sole quan-
 tità

tità cognitive, ma con gl'esponenti incogniti, trovare essi esponenti.

Sia adunque $c^x = ab^{x-1}$, si dimanda il valore dell'esponente incognito x , essendo date le a, b, c ; scrivo $\frac{c^x}{a} = b^{x-1}$, adunque farà $xl c - la = \overline{x-1} lb$, e però $xl c - xlb = la - lb$, quindi $x = \frac{la - lb}{lc - lb}$.

165. Altra questione sarebbe questa. Trovare un numero x tale, che sia $x^x = a$, e $x^{x+p} = b$. Adunque per la prima condizione avremo $xl x = la$, e però $x = \frac{la}{lx}$, o pure $lx = \frac{lx}{x}$.

Per la seconda condizione avremo $x + pl x = lb$, e però farà $x = \frac{lb - pl x}{lx}$, o pure $lx = \frac{lb}{x+p}$. Adunque farà $\frac{la}{x} = \frac{lb}{x+p}$, cioè $xla + pla = xlb$, cioè $x = \frac{pla}{lb - la}$, o pure $\frac{la}{lx} = \frac{lb - pl x}{lx}$, cioè $lx = \frac{lb - la}{p}$. Ciò posto, mi faccio a sciogliere il seguente problema.

166. Dato un vaso di nota capacità pieno di qualunque liquore, che sia per esempio vino, se ne estraiga in un sorso una data quantità, poi si riempia d'acqua il vaso, indi del liquore ora misto d'acqua, e
di

di vino , se ne estragga un'altro sorso eguale al primo , e di poi si riempia d'acqua il vaso , e nuovamente si estragga del misto liquore un sorso pure eguale al primo , e così di mano in mano si vada con la stessa legge ripetendo l'operazione: si dimanda, quanti sorfi bisognerà prendere , cioè quante volte bisognerà ripetere l'operazione , acciò sia nel vaso una data quantità di vino .

Sia $= a$ la capacità del vaso , e sia $= b$ la quantità di ciaschedun sorso . Nel primo sorso adunque s'estraerà dal vaso tanta quantità di vino , che sarà $= b$, ed altrettanto s'infonderà d'acqua , onde dopo il primo sorso sarà nel vaso quantità di vino $= a - b$.

Nel secondo sorso s'estraerà b di liquore misto , onde per avere la quantità del puro vino , che in esso sorso s'estrae , si faccia l'analogia : come la capacità del vaso (a) sta alla quantità d'un sorso (b) , così il vino , che è nel vaso , ($a - b$) al quarto $\frac{ab - bb}{a}$, sarà

esso la quantità del puro vino , che si è estratto nel secondo sorso , rimarrà adunque nel vaso quantità di puro vino $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$, cioè $\frac{a - b}{a}$. Pel terzo sorso

facendo pure l'analogia : come la capacità del vaso (a) sta alla quantità d'un sorso (b) , così il vino , che è nel vaso , ($\frac{a - b}{a}$) al quarto $\frac{a - b}{a} \times \frac{b}{a}$, sarà esso la

quan-

quantità del puro vino, che si è estratto nel terzo forso, rimarrà pertanto nel vaso quantità di puro vino $\frac{a-b}{a} - \frac{b}{a} \times \frac{a-b}{a}$, cioè $\frac{a-b}{a^2}$, e così dopo il quarto forso farà nel vaso quantità di puro vino $\frac{a-b}{a^3}$, e

generalmente dopo un numero n di forsi farà nel vaso quantità di puro vino $\frac{a-b}{a^{n-1}}$. Se adunque si voglia sa-

pere, quanti forsi debbanfi prendere, acciò nel vaso rimanga una data quantità, che sia per esempio $\frac{a}{m}$ di

puro vino, faremo l'equazione $\frac{a-b}{a^{n-1}} = \frac{a}{m}$, la quale,

per essere n incognito, farà appunto esponenziale. Ridotta per tanto l'equazione ai logaritmi, farà

$$\int \frac{a-b}{a^{n-1}} = \int \frac{a}{m}, \text{ cioè } n \log a - b = \log a - \log m + n - 1 \log a,$$

$$\text{o sia } n \log a - b = -\log m + n \log a, \text{ e però } n = \frac{\log m}{\log a - b};$$

con che farà facile avere il numero n col mezzo delle tavole logaritmiche.

FINE DEL TERZO LIBRO.

ISTITUZIONI
ANALITICHE

LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti.

INSTITUZIONI ANALITICHE LIBRO QUARTO

Del Metodo Inverso delle Tangenti .

1. **P**Oichè , data una qualunque curva , il modo di ritrovare la di lei tangente , sottotangente , normale , o qualunque analoga linea si chiamà *Il Metodo diretto delle Tangenti* ; così , data la tangente , sottotangente , normale , o qualunque analoga linea ; siccome pure data la rettificazione , o lo spazio , il modo di ritrovare quella curva , a cui compete la data proprietà della tangente , dello spazio ec. , si chiama *Il Metodo inverso delle Tangenti* .

Nel secondo , e terzo libro si sono ritrovate le espressioni generali differenziali della tangente , e delle linee analoghe , come pure delle rettificazioni , e degli spazj ; adunque paragonando la proprietà data della tangente , della rettificazione ec. alla rispettiva espressione , o formola generale differenziale , nascerà una equazione differenziale del primo grado , o di grado superiore , la quale integrata , o algebricamente , o supposte le quadrature , ci darà la curva , che si ricerca , ed a

cui compete la data proprietà. Si cerchi, per esempio, la curva la di cui sottotangente debba essere eguale alla doppia assissa. Chiamate le assisse x , le ordinate y , la formola della sottotangente è $\frac{y dx}{dy}$, adunque sarà l'e-

quazione $\frac{y dx}{dy} = 2x$. Si cerchi la curva, il di cui spa-

zio debba essere eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate. L'elemento dello spazio è $y dx$; adunque dovrà essere $\int y dx = \frac{2xy}{3}$, e però $y dx = \frac{2x dy + 2y dx}{3}$.

Si cerchi la curva, la di cui proprietà sia, che un qualunque arco preso dal vertice sia eguale alla rispettiva sottotonormale. L'espressione dell'arco è $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$;

quella della sottotonormale è $\frac{y dy}{dx}$; dunque avremo

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{y dy}{dx}, \text{ e però } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{y dx dy + dx dy^2}{dx^2},$$

(presa per costante dx) equazione differenziale del secondo grado.

2. Le equazioni, che in questo modo risultano, avranno sempre, come è facile a vedere, le indeterminate con le differenziali tra loro miste, e confuse, quindi non si fanno per ora maneggiare a fine di passare alle integrazioni, e così avere le curve, che si

cer-

cercano , e molto meno se contengono differenziali secondi , terzi ec. , poichè nell'antecedente terzo libro si sono sempre supposte le formole differenziali essere composte di una sola indeterminata con la sua differenza . Sono adunque necessarj altri ripieghi per tentare di ridurre alle integrazioni , o quadrature tali equazioni , il che si chiama *Costruire le equazioni differenziali del primo , secondo ec. grado* . E quanto a quelle del primo in due maniere si procede ; l'una è di passare alle integrazioni , o quadrature senza alcuna previa separazione delle indeterminate , e loro differenziali ; l'altra di separare prima le indeterminate , e così render le equazioni atte all'integrazioni , o quadrature .

Anderò spiegando varj metodi particolari per ambedue le maniere , co' quali in molte equazioni si ottiene l'intento ; ma moltissime altre se ne incontrano , che si trovano affatto contumaci , almeno coi metodi fin' ora scoperti , i quali non hanno quell'universalità , che sarebbe necessaria .

C A P O I.

Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado, senza alcuna previa separazione dell' indeterminate.

3 **L**E più semplici formole, che abbiano le due variabili assieme confuse, sono le due $xdy + ydx$, ed $ydx - xdy$; l'integrale della prima è xy , della seconda

è $\frac{x^2 - y^2}{2}$, come è chiaro. A queste adunque devonsi procu-

rare di ridurre le più composte, e ciò con i soliti ajuti della semplice Analisi, aggiungendo, sottraendo, moltiplicando, dividendo ec. per quelle quantità, che fanno al proposito, le quali varie faranno, secondo i varj casi. Se ne veggia ora la pratica.

Sia $ydx = xdx - xdy$, trasportato all'altra parte il termine ultimo, sarà $ydx + xdy = xdx$, e però $xy = \frac{xx}{2} \pm bb$. Sia l'equazione $x^2 dy^2 + 2x^2 ydxdy = a^2 dx^2$ —

$xxxydx^2$, cioè $x^2 dy^2 + 2x^2 ydxdy + xxxyydx^2 = a^2 dx^2$, e dividendo per xx , $xydy^2 + 2xydxdy + ydydx^2 = \frac{a^2 dx^2}{xx}$,

e cavando la radice quadrata, $xy + ydx = \frac{aadx}{x}$, ed in-

tegran-

tegrando, $xy = a \log x \pm b$ nella logaritmica della fottante $= a$. Sia l'equazione $ydx = y'dy + yydy + xdy$, cioè $ydx - xdy = y'dy + yydy$. Il primo membro sarebbe integrabile, se fosse diviso per yy , divido adunque l'equazione, onde sia $\frac{ydx - xdy}{yy} = ydy + dy$, ed integrando, $\frac{x}{y} = \frac{yy}{2} + y \pm b$.

4. Sia l'equazione $y^r dy = mydx + xdy$. Se non vi fosse il coefficiente m , la cosa sarebbe facile, poichè l'integrale del secondo membro sarebbe xy . Non riuscirei l'operazione nè meno trasportando il membro xdy nella parte opposta dell'equazione, cioè scrivendo $y^r dy - xdy = mydx$; osservo pertanto, che il differenziale di $mxy^{\frac{1}{m}}$ si è $my^{\frac{1}{m}}dx + xy^{\frac{1}{m}-1}dy$, diverso dal proposto $mydx + xdy$ in questo solo, che è moltiplicato per $y^{\frac{1}{m}-1}$; per rendere adunque integrabile la quantità $mydx + xdy$, basta moltiplicarla per $y^{\frac{1}{m}-1}$, ed a fine di conservare l'egualità, moltiplicare altresì il corrispondente membro $y^r dy$ dell'equazione, e però sarà $y^{r+\frac{1}{m}-1} dy = my^{\frac{1}{m}}dx + xy^{\frac{1}{m}-1} dy$, ed integrando, $\int y^{r+\frac{1}{m}-1} dy = mxy^{\frac{1}{m}} \pm b$.

Sia

Sia la medesima equazione, ma con coefficiente diverso a ciascuno degli ultimi due termini, cioè $y^r dy = mydx + nxdy$. Il secondo membro non è integrabile;

osservo però, che il differenziale di $mxy^{\frac{n}{m}}$ si è

$my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n}{m}-1} dy$, adunque l'omogeneo di comparazione sarebbe integrabile, se fosse moltiplicato per

$y^{\frac{n-1}{m}}$; moltiplico per tanto tutta l'equazione, e farà

$y^{r+\frac{n-1}{m}} dy = my^{\frac{n}{m}} dx + nxy^{\frac{n}{m}-1} dy$, e l'integrale farà

$$\int y^{r+\frac{n-1}{m}} dy = mxy^{\frac{n}{m}} \pm b.$$

5. Il differenziale di $x^n y$ è $x^n dy + nyx^{n-1} dx$.

Ciò posto, sia l'equazione $y^r dy = x^n dy + yx^{n-1} dx$;

se l'ultimo termine avesse il coefficiente n , l'integrale del secondo membro dell'equazione sarebbe $x^n y$. Osser-

vo però, che il differenziale di $x^n y^n$ si è $nx^n y^{n-1} dy +$

$ny^n x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per

ny^{n-1} , onde sia $ny^{r+\frac{n-1}{n}} dy = nx^n y^{n-1} dy + ny^n x^{n-1} dx$,

si trova integrabile, e l'integrale è $\int ny^{r+\frac{n-1}{n}} dy =$

$$x^n y^n \pm b.$$

Ma se l'ultimo termine in vece del coefficiente n ne avesse un'altro, anzi generalmente, se ambedue i termini ultimi fossero affetti da coefficienti diversi; co-

me

me se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy + cyx^{n-1} dx$; of-

servo, che il differenziale di $\frac{c}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}}$ si è

$cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + cy^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$; adunque moltiplicando l'equazione per $y^{\frac{cn}{e}-1}$, onde sia

$y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = cx^n y^{\frac{cn}{e}-1} dy + cy^{\frac{cn}{e}} x^{n-1} dx$, sarà integra-

bile, e l'integrale sarà $\int y^{r+\frac{cn}{e}-1} dy = \frac{c}{n} x^n y^{\frac{cn}{e}} \pm b$.

Facciasi $r=1$, $c=3$, $n=1$, $e=1$, cioè l'equazione $ydy = 3xdy + ydx$; l'integrale sarà $\frac{y^4}{4} = xy$. Facciasi

$c=2$, $e=3$, $n=1$, $r=1$, cioè l'equazione $ydy = 2xdy + 3ydx$, l'integrale sarà $y^{\frac{1+\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$, cioè

$\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} = 3xy^{\frac{2}{3}}$. Facciasi $c=2$, $e=2$, $n=3$, $r=3$, cioè l'equazione $y^3 dy = 2x^3 dy + 2yx^2 dx$, l'integrale sarà $\frac{y^6}{6} = \frac{2}{3} x^3 y^3$.

Se l'equazione fosse espressa così $y^{1-\frac{cn}{e}} x^r dx = cx^n dy + cyx^{n-1} dx$, è chiaro a vedere, che sarebbe in-

h h

tegra-

tegrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{cn-1}{c}}$ farebbe $x^r dx = cx^n y^{\frac{cn-1}{c}} dy + cy^{\frac{cn}{c}} x^{n-1} dx$, ma l'integrale del secondo membro si è veduto, essere $\frac{c}{n} x^n y^{\frac{cn}{c}}$, adunque ec.

6. Sia ora l'equazione $y^r dy = \frac{2xydy - ydx}{xx}$. Se non vi fosse il coefficiente 2, l'integrale del secondo membro farebbe $\frac{y}{x}$. Ma non perciò servirà trasportare alla opposta parte il termine $x dy$, e scrivere $y^r dy - \frac{xydy}{xx} = \frac{xydy - ydx}{xx}$; osservo però, che il differenziale di $\frac{yy}{x}$ si è $\frac{2xydy - yydx}{xx}$, dunque se si moltiplicherà l'equazione proposta per y , onde sia $y^{r+1} dy = \frac{2xydy - yydx}{xx}$, farà integrabile, e l'integrale farà $\int y^{r+1} dy = \frac{yy}{x} \pm b$. Ma più generalmente sia un qualunque coefficiente n , e però l'equazione $y^r dy = \frac{nxydy - ydx}{xx}$. Osservo, che il differenziale di $\frac{y^n}{x}$ è $\frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, adunque se si moltiplicherà l'equazione per y^{n-1} , onde sia $y^{r+n-1} dy = \frac{nxy^{n-1} dy - y^n dx}{xx}$, farà integrabile, e

l'in-

l'integrale sarà $\int y^{r+\frac{n}{m}-1} dy = \frac{y^n}{n} \pm b$.

Anzi abbiano ambi gli ultimi due termini coefficiente diverso, e sia l'equazione $y^r dy = \frac{nx dy - my dx}{xx}$.

Osservo, che il differenziale di $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$ si è

$\frac{nx y^{\frac{n}{m}-1} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$; adunque se si moltiplicherà l'e-

quazione per $y^{\frac{n}{m}-1}$, onde sia $y^{r+\frac{n}{m}-1} dy =$

$\frac{nx y^{\frac{n}{m}-1} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$, sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int y^{r+\frac{n}{m}-1} dy = \frac{my^{\frac{n}{m}}}{x} \pm b.$$

Se l'equazione fosse $y^{1-\frac{n}{m}} x^r dx = \frac{nx dy - my dx}{xx}$,

sarebbe pure integrabile, poichè moltiplicata per $y^{\frac{n}{m}-1}$

sarà $x^r dx = \frac{nx y^{\frac{n}{m}-1} dy - my^{\frac{n}{m}} dx}{xx}$; ma l'integrale del

secondo membro si sa, essere $\frac{my^{\frac{n}{m}}}{x}$, dunque ec.

h h 2

Alle

Alle suddette equazioni manchi il denominatore xx , e sia l'equazione $y^r dy = nxdy - ydx$. Per sommare la seconda parte dell'equazione, bisognerebbe moltiplicarla per y^{n-1} , e dividerla per xx ; ma ciò dovendosi fare anche rispetto alla prima parte, sarebbe essa $\frac{y^{r+n-1} dy}{xx}$, che in nessuna maniera si può som-

mare; adunque si mutino i segni all'equazione, e sarà $-y^r dy = ydx - nxdy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x}{y^n}$ si è $\frac{y^n dx - nxy^{n-1} dy}{y^{2n}}$; adunque se si mol-

tiplicherà l'equazione per y^{n-1} , ed indi se si dividerà per y^{2n} , onde sia $\frac{-y^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{y^n dx - nxy^{n-1} dy}{y^{2n}}$,

sarà integrabile, e l'integrale sarà

$$\int \frac{-y^{r+n-1} dy}{y^{2n}} = \frac{x}{y^n} \pm b.$$

Abbia l'equazione ambi gli ultimi due termini con il coefficiente, e sia $y^r dy = nxdy - mydx$. Si mutino i segni, e sarà $-y^r dy = mydx - nxdy$; osservo, che il

differenziale di $\frac{x}{my^{\frac{n}{m}}}$ è $\frac{my^{\frac{n}{m}} dx - nxy^{\frac{n}{m}-1} dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$; adunque

se si moltiplicherà l'equazione per $y^{\frac{n}{m}-1}$, e si dividerà

per

per $mmy^{\frac{2n}{m}}$, onde sia $-y^{\frac{r+\frac{n-1}{m}}{m}} dy =$

$\frac{ny^{\frac{n}{m}} dx - nxy^{\frac{n-1}{m}} dy}{mmy^{\frac{2n}{m}}}$, farà integrabile, e l'integrale farà

$$\int -y^{\frac{r+\frac{n-1}{m}}{m}} dy = \frac{x}{my^{\frac{n}{m}}} \pm b.$$

7. Sia l'equazione $y^r dy = x^n dy - nyx^{n-1} dx$. Si mutino i segni, e farà $-y^r dy = nyx^{n-1} dx - x^n dy$; osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y}$ è $\frac{nyx^{n-1} dx - x^n dy}{y^2}$,

dunque dividendo l'equazione per yy , onde sia $-y^{r-2} dy = \frac{nyx^{n-1} dx - x^n dy}{y}$, farà integrabile, e

farà l'integrale $\int -y^{r-2} dy = \frac{x^n}{y} \pm b.$

Ma se mancasse il coefficiente n , e l'equazione fosse $y^r dy = x^n dy - yx^{n-1} dx$; si mutino i segni, e farà $-y^r dy = yx^{n-1} dx - x^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{y^n}$ è $\frac{ny^n x^{n-1} dx - nx^n y^{n-1} dy}{y^{2n}}$; dunque moltiplicando l'equazione per ny^{n-1} , e dividendola

per

per y^{2n} , onde sia $\frac{-ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} = \frac{ny^n x^{n-1}dx - nx^n y^{n-1}dy}{y^{2n}}$,

farà integrabile, e l'integrale farà $\int \frac{-ny^{r+n-1}dy}{y^{2n}} =$

$$\frac{x^n \pm b}{y^n}.$$

Che se in luogo del coefficiente n ve ne fosse un'altro di natura diversa; anzi se ambi gl'ultimi termini fossero affetti da coefficiente diverso, come se l'equazione fosse $y^r dy = cx^n dy - eyx^{n-1} dx$, si mutino i segni, e farà $-y^r dy = eyx^{n-1} dx - cx^n dy$. Osservo, che il differenziale di $\frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{2}}}$ è $\frac{ney^{\frac{nc}{2}} x^{n-1} dx - ncx^n y^{\frac{nc}{2}-1} dy}{ey^{\frac{2nc}{2}}}$;

dunque moltiplicando l'equazione per $ny^{\frac{nc-1}{2}}$, e dividendola per $ey^{\frac{2nc}{2}}$, onde sia $\frac{-ny^{\frac{r+nc-1}{2}} dy}{ey^{\frac{2nc}{2}}} =$

$\frac{ney^{\frac{nc}{2}} x^{n-1} dx - ncx^n y^{\frac{nc}{2}-1} dy}{ey^{\frac{2nc}{2}}}$, farà integrabile, e l'in-

tegrale farà $\int \frac{-ny^{\frac{r+nc-1}{2}} dy}{ey^{\frac{2nc}{2}}} = \frac{x^n}{ey^{\frac{nc}{2}}} \pm b$.

Ma

Ma se l'equazione fosse espressa così $y^{\frac{nc}{e}} x^r dx = cx^n dy - cyx^{n-1} dx$; senza mutare i segni osservo, che il differenziale di $\frac{ey^{\frac{nc}{e}}}{x^n}$ si è $\frac{ncx^n y^{\frac{nc}{e}}}{x^{2n}} dy - \frac{ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1}}{x^{2n}} dx$;

dunque moltiplicando l'equazione per $\frac{ny^{\frac{nc}{e}}}{x^{2n}}$, e dividendola per x^{2n} , onde sia $\frac{nx^r dx}{x^{2n}} =$

$\frac{ncx^n y^{\frac{nc}{e}}}{x^{2n}} dy - \frac{ney^{\frac{nc}{e}} x^{n-1}}{x^{2n}} dx$, farà integrabile, e farà

l'integrale $\int \frac{nx^r dx}{x^{2n}} = ey^{\frac{nc}{e}} \pm b$.

8. È stato detto da me al num. 17. dell'antecedente libro, che ogni qual volta il numeratore d'una frazione composta di una sola indeterminata, e delle costanti, sia il differenziale preciso del denominatore, o pure un proporzionale di esso differenziale, l'integrale della formola è il logaritmo del denominatore, o il proporzionale di esso logaritmo. Ciò vale per tanto anche quando la formola contenga due indeterminate fra se milte coi loro differenziali. L'integrale adunque di $\frac{dx + dy}{x + y} = dz$ (dz è in qualunque modo data per x , o

per

per y) farà $\int \frac{dx + dy}{2x + 2y} = dz$

farà $\int \frac{1}{\sqrt{x+y}} = z + b$. L'integrale di $\frac{4xdx - 4ydy}{xx - yy} = dz$

farà $\int \frac{2}{\sqrt{xx - yy}} = z + b$. L'integrale di

$\frac{xdy + ydx - 2ydy}{2xy - 2yy} = dz$ farà $\int \frac{1}{\sqrt{xy - yy}} = z + b$. E

generalmente l'integrale di

$\frac{my^n x^{m-1} dx + nx^m y^{n-1} dy - m-n \times y^{m+n-1} dy}{r \times x^m y^n - y^{m+n}} = dz$

farà $\int \frac{1}{\sqrt{x^m y^n - y^{m+n}}} = z + b$; e così di qualunque altra equazione, che abbia la assegnata condizione.

9. Molte equazioni però, sebbene non anno la necessaria condizione, possono facilmente con gli ajuti dell'algebra ridursi ad averla. Così l'equazione $\frac{xdy + ydx}{x} = -dy$

non ha nel primo membro la condizione, che si ricerca; l'avrà però, se si divida per y , onde sia

$\frac{xdy + ydx}{xy} = -\frac{dy}{y}$, e però integrando, $\int \frac{1}{xy} = \int \frac{-1}{y} = \pm \log y$.

Sia l'equazione $axdy + 2aydx = xydy$; la divido per axy , e farà $\frac{xdy + 2ydx}{xy} = \frac{dy}{y}$, la quale sarebbe integra-

bile, se nel secondo termine del primo membro non

vi fosse il coefficiente 2, sottraggo adunque la quantità $\frac{ydx}{xy}$ dall'uno, e dall'altro membro, e sarà $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xy}$, cioè $\frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, e però integrando, $\int \frac{xdy + ydx}{xy} = \int \frac{dy}{x} - \int \frac{dx}{y} = \frac{y}{x} - \log x \pm \log y$.

Sia l'equazione $xydx = xxydy + y^2dy \sqrt{y - yy}$, la divido per y , e sarà $x dx = xxdy + ydy \sqrt{y - yy}$, cioè $x dx + ydy = xxdy + ydy \sqrt{y - yy}$, e di nuovo dividendo per $xx + yy$, $\frac{x dx + ydy}{xx + yy} = dy \sqrt{y - yy}$, ed integrando,

$$\int \frac{x dx + ydy}{xx + yy} = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \pm b.$$

10. Dalli numeri 31., e 32. dello stesso sopra citato libro terzo si ricava, che una qualunque formola composta di una sola variabile, se sarà il prodotto di qual si sia quantità complessa elevata a potenza positiva, o negativa, intera, o rotta nel differenziale preciso, o nel proporzionale del differenziale de' termini della quantità, sarà sempre integrabile, e l'integrale sarà la stessa quantità, il di cui esponente sia quello di prima, ma accresciuto dell'unità, e moltiplicato nello stesso esponente così accresciuto, ma inversamente preso; cioè, che è lo stesso, per esso divisa; o pure esso integrale sarà un proporzionale di questo. Nulla meno vale la

regola, quando le formole differenziali sieno ancora composte di due variabili, e loro differenziali promissuamente, purchè abbiano la notata condizione.

L'integrale adunque di $\overline{dx + dy \sqrt{x+y}} = dz$ (dz è in qualunque modo data per x , o per y) farà

$\frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. L'integrale di

$\frac{1}{2} \overline{dx + \frac{1}{2} dy \sqrt{x+y}} = dz$ farà $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$,

cioè $\frac{1}{3} \times \overline{x+y}^{\frac{3}{2}} = z \pm b$. L'integrale di $\frac{2axdx + 2bly}{\sqrt{ax+by}} = dz$

farà $4\sqrt{ax+by} = z \pm b$. L'integrale di

$\frac{p'dq + 3ppdp + 3pqqdq + q'dp}{2\sqrt{p'q + q'p}} = dz$ farà $\sqrt{p'q + q'p} =$

$z \pm b$. L'integrale di $\overline{xdy + ydx + 2ydy} \times b \times \overline{xy + yy}^{\frac{n}{m}} = dz$

farà $\frac{mb}{m+n} \times \overline{xy + yy}^{\frac{m+n}{m}} = z \pm b$. L'integrale di

$\overline{xdy + ydx + 2ydy} = dz$ farà $\frac{m \times \overline{xy + yy}^{\frac{m-n}{m}}}{m-n \times b} = z \pm b$.

E così di mille altre di simil sorta.

Tal

Tal ora però avranno le equazioni bisogno prima di qualche preparazione . Sia l'equazione $xxdx + xydy + yydx = dz$, (dz è data in qualunque modo per x) la moltiplico per x , e farà $x^2dx + xxydy + yyxdx = xdz$, cioè $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times \overline{xx} = xdz$, che non à la condizione necessaria ; l'avrebbe però , se ydy fosse altresì moltiplicata in yy , aggiungo adunque all'uno , ed all'altro membro il termine y^2dy , e farà $xdx \times \overline{xx + yy} + ydy \times \overline{xx + yy} = xdz + y^2dy$, cioè $\overline{xdx + ydy} \times \overline{xx + yy} = \overline{xdz + y^2dy}$, capace d'integrazione , e però integrando ,

$$\frac{xx + yy}{4} = \frac{y^4}{4} \pm b + \int xdz .$$

Ma non è così facile a riconoscere , quale quantità debba aggiungersi , o sottrarsi , o quale altra alterazione possa farsi alle equazioni , a fine di renderle capaci del suddetto metodo , così che quando le equazioni sieno alquanto composte , l'arrivare in questo modo al fine si potrà dire una fortuna , un caso ; quindi in tali incontri bisognerà ricorrere ai metodi della separazione delle indeterminate , e però sia

C A P O II.

Della Costruzione delle Equazioni differenziali del primo grado per mezzo della precedente separazione delle Indeterminate .

11. DI alcune equazioni, quantunque pochissime, succede la separazione delle indeterminate con le sole operazioni prime dell'algebra ordinaria . Tale sarebbe l'equazione $xxdx^2 + xydx dy = aady^2$, in cui osservo, che il primo membro è una formola di quadratica affetta dal lato, che farebbe un quadrato, se vi fosse di più la quantità $yydy^2$. Aggiungo per tanto all'uno, ed all'altro membro la quantità $\frac{yydy^2}{4}$, e l'equazione farà $xxdx^2 + xydx dy + \frac{yydy^2}{4} = aady^2 + \frac{yydy^2}{4}$, ed estraendo la radice, $xdx + \frac{ydy}{2} = dy \sqrt{\frac{yy}{4} + aa}$, in cui sono separate le variabili, e però integrando, $\frac{xx}{2} + \frac{yy}{4} = \int dy \sqrt{aa + \frac{yy}{4}} \pm b$. L'integrale del secondo membro dipende dalla quadratura dell'iperbola .

12. Il più delle volte adunque conviene servirsi delle sostituzioni . Sia l'equazione $aadx = xxdy + zxydv + yydy$. Si ponga $x + y = z$, (la z è una nuova indeterminata) e però $dx + dy = dz$, ed $xx + zxy + yy = zz$. Fatte adunque le sostituzioni , sarà $aadz - aady = zzdy$, cioè $\frac{aadz}{aa + zz} = dy$, equazione , in cui sono separate le variabili .

L'integrale del primo membro dipende dalla rettificazione del circolo .

Sia l'equazione $\frac{xdy + ydx \sqrt{a^2 - xxyy}}{x^2 + yy \sqrt{xx + yy}} =$. Osservo nel primo membro ,

che l'integrale di $xdy + ydx$ si è xy , e che il quadrato di questo integrale si trova precisamente nella quantità $\sqrt{a^2 - xxyy}$; adunque se porrò $xy = z$, nel primo membro saranno separate le variabili , e sarà esso $dz \sqrt{a^2 - zz}$. Osservo in oltre , che nel secondo membro l'integrale di $\frac{x^2 + yy}{2}$ è $\frac{xx + yy}{2}$, e che simili a questo integrale

sono le quantità nel denominatore ; adunque con la sostituzione di $xx + yy = zp$ si separeranno le indeterminata anche nel secondo membro , e l'equazione sarà

$$dz \sqrt{a^2 - zz} = \frac{dp}{\sqrt{2p} \sqrt{2p}} .$$

Sia

Sia l'equazione $\frac{2xdy - ydx}{x-y} = dz$ (la dz è data in

qualsivoglia modo per x , o per y). L'integrale di $xdy - ydx$ si averà quando si divida per xx , e farà $\frac{y}{x}$.

Suppongasì adunque $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, e però $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dp}{a}$, e $2xdy - ydx = \frac{2xxdp}{a}$. Fatta per tanto la sostituzione,

farà $\frac{2xxdp}{a \times xx - 2xy + yy} = dz$, e dividendo il numera-

tore, e denominatore del primo membro per xx , farà $\frac{2dp}{a \times 1 - \frac{2y}{x} + \frac{yy}{xx}} = dz$; ma si è posto $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$, ed $\frac{yy}{xx} = \frac{pp}{aa}$,

adunque farà $\frac{2adp}{aa - 2ap + pp} = dz$; e giacchè l'integrale

di questa equazione è algebrico, anderò avanti per l'integrazione; e però sia $a - p = q$, adunque $-\frac{2adq}{q^2} = dz$,

ed integrando, $\frac{2a \pm b}{q} = z$. Ma $q = a - p$, e $p = \frac{ay}{x}$,

e però $q = \frac{ax - ay}{x}$; restituito per tanto questo valore,

farà $2x \pm b = z$, che è la curva dell'equazione differenziale proposta.

Se in luogo di fare $a - p = q$, si avesse fatto

fatto $p - a = q$, averebbesi trovato altro integrale, ma diverso solo ne' segni.

13. La sopra scritta equazione mi porge occasione di fare una importante avvertenza; ed è, che le curve non solo mutano tal ora natura nel prendere le sommatorie, o semplicemente, o coll'addizione della costante, il che è stato notato fino dalla prima origine delle quantità infinitesime, ma alle volte ci si presentano pure formole tali, che ammettono integrazioni affatto diverse, e ci somministrano curve di vario genere anche senza aggiungere costante alcuna, il che merita qualche riflesso.

Per mezzo della supposizione $\frac{y}{x} = \frac{p}{a}$ è stata integrata l'equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{x - y} = dz$, e l'integrale si è

trovato, essere $\frac{2x}{x - y} = z$, ommessa la costante. Faccio

ora la supposizione di $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$, e tento l'integrazione;

farà dunque $\frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{dp}{a}$, e però $2xdy - 2ydx =$

$-\frac{2yydp}{a}$, e sostituendo, farà l'equazione $\frac{-2dp}{a \times \frac{xx - 2x + 1}{yy}} = dz$;

$$a \times \frac{xx - 2x + 1}{yy} \frac{1}{y}$$

ma

ma $\frac{x}{y} = \frac{p}{a}$, dunque $\frac{-2adp}{pp-2ap+aa} = dz$; e fatta

$p-a=q$, $-\frac{2adq}{qq}=dz$, ed integrando, $\frac{2a}{q}=z$; quindi restituiti i valori, $\frac{2y}{x-y}=z$, integrale della proposta

equazione differenziale, e diverso dal primo.

Altro integrale della proposta formola diverso dai primi due si è $\frac{x+y}{x-y}=z$; ed in fatti differenziando,

farà $\frac{xdx-ydx+xdy-ydy-ydy-xdx-ydx+xdy+ydy}{x-y}=dz$,

e cancellati i termini, che si elidono, $\frac{2xdy-2ydx}{x-y}=dz$,

che è l'equazione da prima proposta.

Sia $dz=dy$, e la proposta equazione $\frac{2xdy-2ydx}{x-y}=dy$.

Se mi servo del secondo integrale ritrovato, nasce l'equazione $\frac{2y}{x-y}=y$, e perciò $2+y=x$, luogo al triangolo.

Se poi mi servo del primo, e del terzo integrale ponendo $\frac{2x}{x-y}=y$, ovvero $\frac{x+y}{x-y}=y$, la curva è del

secondo grado.

Ge-

farà sempre divisibile per tanta potestà dell' indeterminata x , quanta era la somma degl' esponenti di x , ed y in ogni termine dell' equazione proposta, quindi fatta la divisione, la lettera x non oltrepasserà la prima potestà, e sarà sempre moltiplicata in dz , onde si ridurrà l' equazione in modo, che da una parte vi sia $\frac{dx}{x}$,

e dell' altra dz con le sole funzioni di z , e così saranno separate le variabili. Imperciocchè chiamando A tutti que' termini, che sono moltiplicati nella dy , e B quelli, che sono moltiplicati nella dx , l' equazione sarà $A dy = B dx$, e le A , B sono date promiscuamente per x , ed y . Ora poichè le dimensioni della lettera y assieme con le dimensioni della lettera x in ogni termine fanno lo stesso numero, se in luogo di y si porrà $\frac{xz}{a}$, ne verrà, che in ciascun termine delle quantità

A , B la lettera x abbia la stessa dimensione, che prima avevano x , ed y assieme; per lo che, se questa dimensione si chiamerà n , l' equazione sarà divisibile per x^n , rimanendo solo z , a , dy , dx . Suppongasì, che dopo la sostituzione di $\frac{xz}{a}$, e dopo la divisione per x^n

ciò, che rimane nella quantità A , sia C ; e ciò, che rimane nella quantità B , sia D ; sarà l' equazione $C dy = D dx$, e le C , D sono date per z , e per le costanti, ma
 $dy =$

$dy = \frac{x dz + z dx}{a}$; adunque sarà l'equazione $\frac{Cx dz + Cz dx}{a} =$

$D dx$, cioè $D a dx - C z dx = C x dz$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{C dz}{D a - C z}$,

e così le indeterminate coi loro differenziali faranno separate, e l'equazione costruibile, almeno per le quadrature.

E' indifferente il porre $y = \frac{zx}{a}$, o pure $x = \frac{yz}{a}$,

poichè sì nell'una, come nell'altra maniera si separano sempre le indeterminate; ma alle volte una sostituzione piuttosto, che l'altra ci darà l'equazione più semplice, e di minori termini, o la costruzione più facile, e più elegante; quindi non sarà mal fatto il provarle tutte due, ed in fine appigliarsi a quella, che riuscirà la migliore.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $xx dy = yy dx + xy dx$. Pongo $y = \frac{xz}{a}$,

e però $dy = \frac{x dz + z dx}{a}$; fatte le sostituzioni, sarà

$\frac{x' dz + z x x dx}{a} = \frac{x x z dx}{a a} + \frac{z x x dx}{a}$, e riducendo al comun

denominatore, e dividendo per xx , sarà $ax dz + az dx = z z dx + a z dx$, cioè $ax dz = z z dx$, e $\frac{dx}{ax} = \frac{dz}{zz}$.

kk 2

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $xxdy = yydx + xxdx$. Posta $y = \frac{xz}{a}$,
 $dy = \frac{x dz + z dx}{a}$, e fatte le sostituzioni, sarà $\frac{x' dz + z x x dx}{a} =$
 $\frac{z z x x dx + x x dx}{a}$, e riducendo al comun denominatore,
 e dividendo per xx , farà $axdz + azdx = zzdx + aadx$,
 cioè $zzdx - azdx + aadx = axdz$, e però $\frac{dx}{x} =$
 $\frac{adz}{zz - az + aa}$. Facendo poi l'altra sostituzione $x = \frac{yp}{a}$,
 e $dx = \frac{y dp + p dy}{a}$, sarà $\frac{ppyydy}{aa} = \frac{y' dp + p y dy}{a} +$
 $\frac{y' p p dp + p' y y dy}{a'}$, e dividendo per yy , $\frac{appdy}{a} = \frac{aaydp +$
 $aapdy + yppdp + p' dy}{a}$, cioè $\frac{appdy}{a} - \frac{aaydp}{a} - \frac{p' dy}{a} =$
 $\frac{aaydp + yppdp}{a}$, e però $\frac{dy}{y} = \frac{aap + p p dp}{app - aap - p'}$.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $dy \sqrt{xx+yy} = ydx$. Posta $y = \frac{xz}{a}$,
 e $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$, e fatte le sostituzioni, farà

$$\frac{xdz + zdx}{a} \sqrt{xxzz + aaxx} = \frac{zxdx}{a}, \text{ cioè}$$

$$xxdz + zxdx \sqrt{aa + zz} = azxdx, \text{ e dividendo per } x,$$

$$xdz \sqrt{aa + zz} + zdx \sqrt{aa + zz} = azdx, \text{ o sia}$$

$$xdz \sqrt{aa + zz} = azdx - zdx \sqrt{aa + zz}, \text{ e però}$$

$$\frac{dz \sqrt{aa + zz}}{az - z \sqrt{aa + zz}} = \frac{dx}{x}. \text{ Se avessi posto } x = \frac{yp}{a}, \text{ avrei}$$

$$\text{avuta l'equazione } \frac{dy}{y} = \frac{dp}{\sqrt{aa + pp} - p}.$$

15. Ma alle volte i differenziali medesimi dx , e
 dy ascendono a dimensioni più alte, essendovi per altro
 nelle equazioni la condizione espressa di sopra. In que-
 sti casi la sostituzione, come prima, fatta di $\frac{xz}{a}$ in-

luogo della y (lasciando per ora intatta la dy) renderà
 ogni termine dell'equazione divisibile per la stessa po-
 teltà di x , e vi resteranno solo nell'equazione z , dx ,

c

e dy con le costanti date, ed assunte, ma non più la x . Ora perchè in luogo pure di dy si deve porre $\frac{xdx + xdz}{a}$,

con che di nuovo si introduce la lettera x , si faccia $\frac{xdz}{a} = dt$, ed in luogo di dy si scriva $\frac{zdx + adt}{a}$, e l'e-

quazione averà solamente z , dt , dx con le costanti date, ed assunte, ma non più x . Si faccia $a, u :: dx, dt$, ed in luogo di dt si ponga da pertutto $\frac{udx}{a}$, ne-

verrà un'equazione libera dalle quantità differenziali; in cui si avranno le sole u, z , e le costanti per una curva algebrica. Per mezzo di questa curva si troveranno i valori reali della u ; sieno adunque questi A, B, C ec. in modo, che sia $u = A, u = B, u = C$ ec., faranno A, B ec. date solamente per z , e per le costanti, e sarà $dx = \frac{adt}{A}, dx = \frac{adt}{B}$ ec., e perchè $dt =$

$\frac{xdz}{a}$, farà $dx = \frac{xdz}{A}, dx = \frac{xdz}{B}$ ec.; onde finalmente

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}, \frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec., ed i logaritmi della x faranno di-

rettamente proporzionali agli spazj compresi dalle curve, delle quali le assisse essendo z , le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di sopra ritrovati della quantità u , e tante faranno le curve, che soddisfaranno, quanti faranno i valori reali fra se diversi

della

della lettera u , avvertendo però, che l'aggiungere la costante nelle integrazioni delle equazioni $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{A}$,

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{B}$ ec. può nuovamente diversificare le curve,

che soddisfanno al quesito, e raddoppiare spesso volte il numero loro. Sarà dunque $1x$ = allo spazio di quella curva, che abbia per assissa z , e per ordinata $\frac{1}{A}$,

$\frac{1}{B}$ ec., cioè eguale all'integrale di $\frac{dz}{A}$, $\frac{dz}{B}$ ec.; quindi

prendendo z arbitraria, il logaritmo della x sarà dato, e per conseguenza anche data la corrispondente x ordinata nella logaritmica. Data adunque la x , per mezzo dell'equazione $y = \frac{xz}{A}$, sarà anche data la y , cioè

ambe le coordinate dell'equazione differenziale proposta, o sia della curva, che si cerca. A misura de' diversi valori, che si daranno alla z , faranno anche diversi i punti della stessa curva cercata.

E S E M P I O .

Applicherò la regola ad un'esempio: sia l'equazione $xxdy^2 + xydx dy = xx dx^2$. Si faccia adunque $y = \frac{xz}{A}$, e collocato questo valore nell'equazione in luogo di y ,
ave-

avremo $axxdy^2 + xxzdx dy = axxdx^2$, e fatta la divisione per xx , sarà $ady^2 + zdx dy = adx^2$, onde si vede, che x , e le sue funzioni interamente spariscono, restandovi solo z , dx , dy con le loro funzioni. Ma perchè collocando in luogo di dy il suo valore $\frac{zdx + xdz}{a}$

s'introdurrebbe di nuovo nell'equazione la x , si faccia $\frac{x dz}{a} = dt$, e però $dy = \frac{zdx + a dt}{a}$, e l'equazione sarà

$$\frac{zzdx^2 + 2zxdxdt + aadt^2}{a} + \frac{zzdx^2 + azdxdt}{a} = adx^2, \text{ cioè}$$

$zzzdx^2 + 3azdxdt + aadt^2 = aadx^2$, in cui entrano le sole z , dx , dt con le loro funzioni. Di nuovo supposta $dt = \frac{udx}{a}$, e fatta la sostituzione, si arriva alla espressione puramente algebrica $zzz + 3zu + uu = az$, adunque

avremo il valore di u dato algebricamente per z , e le costanti. Ma $dt = \frac{udx}{a} = \frac{x dz}{a}$, quindi $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{u}$,

nella quale equazione essendo u data per z , sono separate le variabili. Descritte adunque le curve, delle quali le assisse essendo z , le ordinate sieno reciprocamente proporzionali ai valori di u , avremo la x , ed indi la y , per la sostituzione fatta di $y = \frac{xz}{a}$.

16. Di questa equazione però, che è presa per esempio, siccome d'altre ancora succede, che senza servirsi di questo metodo, si possano ridurre facilmente

al

al metodo del num. 14. Ed in fatti, se all'uno, ed all'altro membro della suddetta equazione $xxdy^2 + xydx dy = xxdx^2$ aggiungasi il quadrato $\frac{1}{4}yydx^2$, essa sarà $xxdy^2 + xydx dy + \frac{yydx^2}{4} = xxdx^2 + \frac{yydx^2}{4}$, e cavando la radice, $xdy + \frac{1}{2}ydx = dx \sqrt{xx + \frac{yy}{4}}$, ed eccola ridotta al suddetto metodo generale del num. 14. O pure trasponendo il termine $xydx dy$, ed aggiungendo il quadrato $\frac{1}{4}yydy^2$, onde sia $xxdy^2 + \frac{1}{4}yydy^2 = xxdx^2 - xydx dy + \frac{1}{4}yydy^2$, ed estraendo la radice, $dy \sqrt{xx + \frac{1}{4}yy} = xdx - \frac{ydy}{2}$, ridotta allo stesso metodo.

17. Le equazioni, che contengono differenziali fra loro misti, ed elevati a potestà qualunque, non solo possono costruirsi nel caso considerato al num. 15., che suppone eguale la somma degli esponenti delle variabili in ciascun termine; ma generalmente in qualunque modo sieno esse equazioni, purchè l'una delle due indeterminate x , o y manchi. Ciò si farà ponendo $dx = \frac{zdv}{a}$, se manca la x ; o $dy = \frac{zdx}{a}$, se manca la y , essendo la z una nuova indeterminata, ed a una costante qualun-

que. Imperciocchè con tale sostituzione, per esempio, di $\frac{zdy}{a}$ in luogo di dx nella proposta equazione, è mani-

festo, che ne nascerà un'altra, la quale sarà divisibile per la potestà della dy per modo, che si troverà composta di sole quantità finite, e però si averà la z data per la sola y , e le costanti, e la relazione della y alla z sarà espressa da un'equazione, o sia curva algebrica. Nella equazione adunque $dx = \frac{zdy}{a}$ posto in luogo di dy

il valore, che si ricaverà da tale equazione algebrica, si avranno separate le variabili.

E S E M P I O I.

Sia l'equazione $ydy^3 dx = adx^4 + 2adx^2 dy^2 + ady^4$.
 Pongo $dx = \frac{zdy}{a}$; fatte le sostituzioni in luogo di dx , e
 sue potestà, avremo l'equazione $\frac{zydy^4}{a} = \frac{z^4 dy^4}{a^4} +$
 $\frac{2zzdy^4}{a} + ady^4$, e dividendo per dy^4 , sarà $\frac{zy}{a} = \frac{z^4}{a^4} +$
 $+\frac{2zz}{a} + a$, e però $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, e $dy = \frac{3zzdz}{aa} +$
 $2dz - \frac{aadz}{zz}$, adunque $\frac{zdy}{a} = dx = \frac{3z^3 dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$.

Si

Si faccia passaggio all'integrazioni, sarà dunque $x = \frac{3z^4 + zz - 1}{4a^3}$, preso il logaritmo nella logaritmica.

della sottangente a . Quindi si hanno i valori delle due coordinate x, y della equazione differenziale proposta per mezzo di due curve, che hanno la comune indeterminata z . Per avere la costruzione si proceda così.

Nell'asse QE (Fig. 1.) prese le assisse, si descriva la curva DAH dell'equazione $y = \frac{z^4}{aa} + zz + \frac{aa}{z}$, e la curva RIK dell'equazione $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - 1$, faranno

le $EH = y$, $EK = x$ le coordinate della proposta curva differenziale, per la costruzione della quale, fatta CM parallela ad EK , si produca KM in N , onde sia sempre $MN = EH$; e la curva NBN sarà la ricercata.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $y^3 dx^3 + a^3 y dy dx^3 = a^3 dy^3$. Pongo $dx = \frac{z dy}{a}$; fatte le sostituzioni, avremo $\frac{z^3 y^3 dy^3}{a^3} + \frac{a^3 z y dy^3}{a^3} = a^3 dy^3$, e dividendo per dy^3 , $z^3 y^3 + a^3 z^4 y = a^3$; sarà adunque la z data per la sola y , e le costanti,

ti, e però nell'equazione $dx = \frac{zdy}{a}$ faranno separate le variabili.

Per avere la curva della proposta equazione differenziale. All'asse CE , (*Fig. 2.*) si descriva la curva IK dell'equazione $z'y' + a'z'y = a'$, essendo le $CM = y$, $MK = z$; in KM prodotta si prenda MN eguale allo spazio $CMKI$ diviso per a , farà $MN = \int \frac{zdy}{a} = x$, ed il punto N in curva.

18. Si può rendere più generale il metodo del num. 14. col trasformare le equazioni, che non hanno la condizione delle somme eguali degl' esponenti, in altre, che abbiano esse somme eguali, e siano in conseguenza soggette al canone di esso numero. Ciò in due maniere si può fare. L' una farà di servirsi di congrue sostituzioni, delle quali però non v'è regola alcuna, ed i soli esempj possono farcene acquistare l' industria; L' altra alterando gli esponenti della proposta formola, o equazione a fine di determinare almeno, in quali casi, e con quale sostituzione possa riuscire di trasformarla in una equivalente, in cui si verifichi la condizione prescritta; così se non si potranno generalmente separare le variabili, si determineranno infiniti casi, ne quali la separazione succede.

ESEM.

ESEMPIO I.

E quanto alla prima maniera : sia l'equazione
 $dx \sqrt{aaxx + az^2} = zzdz$, che non à la necessaria con-

dizione. Faccio $z^2 = ayy$, e differenziando $zzdz = \frac{2aydy}{2}$;

e però, fatte le sostituzioni, $dx \sqrt{aaxx + ayy} = \frac{2aydy}{2}$,

espressione, che può trattarsi col metodo del num. 14.

Si può avere l'intento anche ponendo $\sqrt{aaxx + az^2} = au$,
 e però $aaxx + az^2 = aaau$, e differenziando, $2aaxdx +$
 $3azzdz = 2aauu$, cioè $zzdz = \frac{2aauu - 2axdx}{3}$, e fatte

le sostituzioni, $udx = \frac{2udu - 2x dx}{3}$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $x^2 dx + \frac{xxdy}{\sqrt{a+y}} = dy$. Faccio $\sqrt{a+y} = z$,

e però $a+y = zz$, e $dy = zzdz$, e sostituendo, $x^2 dx +$
 $2xxdz = zzdz$. Ma questa ricerca in oltre un'altra pic-

cola riduzione; pongo per tanto $xx = u$, e però $x^2 = uu$,

c

e $4x^3 dx = z du$, quindi surrogati i valori, sarà finalmente $\frac{udu}{z} + z u dz = z z dz$, il che ec.

19. Passo alla seconda maniera con alterare gli esponenti, e però prendo l'equazione generale di tre termini $ay^n x^m dx + by^q x^p dx + cx^r y^t dy = 0$, in cui i segni possono essere, comunque si vuole, positivi, o negativi. Se fosse $n + m = q + p = r + t$, sarebbe il caso del num. 14.; ma supposto, che fra le somme degli esponenti non vi sia questa eguaglianza, si ponga $y = z^t$, onde $dy = tz^{t-1} dz$, $y^q = z^{qt}$, $y^t = z^{tt}$, $y^n = z^{nt}$, e fatte le debite sostituzioni nella proposta equazione, sarà

$az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tcx^r z^{tt+t-1} dz = 0$. Ma per la condizione del suddetto num. 14. fa di mestieri, che sia $nt + m = qt + p = r + st + t - 1$; dalla prima equazione adunque $nt + m = qt + p$ caverassi il valore dell'esponente assunto $t = \frac{p-m}{n-q}$, il quale sostituito nella secon-

da $qt + p = r + st + t - 1$, o sia $\frac{s-q+1}{n-q} \times t = p-r+1$, ci darà $\frac{s-q+1}{n-q} \times \frac{p-m}{n-q} = p-r+1$, che è la condizione, che devono avere gli esponenti della proposta equazione, verificandosi la quale, sarà sempre riducibile al canone del num. 14., e la sostituzione da

farli sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Se

Se in luogo di porre $y = z^t$ avessi posto $x = z^t$, avrei trovata la medesima condizione da verificarsi negli esponenti, ma sarebbe $t = \frac{n-q}{p-m}$, e però la sostit-

uzione da farsi $x = z^{\frac{n-q}{p-m}}$.

Può darsi, che la sostituzione $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$ divenga impossibile, cioè quando sia $p = m$, o $n = q$; ma si avverta, che in quelli casi le indeterminate sono separabili senza bisogno di riduzione.

Nella equazione canonica $ay^n x^m dx + by^t x^p dx + cx^r y^s dy = 0$, se oltre la supposizione di $y = z^t$, si porrà ancora $x = u^i$, fatte tutte le sostituzioni, si troverà l'equazione $aiz^{nt} u^{im} + i-1 du + biz^{qt} u^{ip} + i-1 du + ctu^{ir} z^{st} + t-1 dz = 0$; dal paragone degli esponenti del primo, e secondo termine caverassi $nt + im + i - 1 = qt + ip + i - 1$, cioè $t = i \times \frac{p-m}{n-q}$; dal paragone di quelli

del secondo, e terzo si troverà $ir + st + t - 1 = qt + ip + i - 1$, o sia $t \times \frac{s-q+1}{p-r+1} = i \times \frac{p-r+1}{p-m}$, e posto in luogo di t il suo valore, $i \times \frac{p-m}{n-q} \times \frac{s-q+1}{p-r+1} = i \times \frac{p-r+1}{p-m}$, che è la condizione, che devono avere gli esponenti dell'equazione proposta; ma la lettera i sparisce dalla condizione, dunque è stata affatto superflua la seconda sostituzione di $x = u^i$, dal che

che s'inferisce, che tutte le formole al canone del num. 14. non possono ridursi generalmente, ma solo quelle, in cui si verifichi la condizione $\overline{p-m} \times \overline{s-q+1} = \overline{n-q} \times \overline{p-r+1}$. Iteffamente si discorra dell'altre, che quanto prima maneggerò, composte di maggior numero di termini.

20. Crescendo il numero de' termini oltre il tre, cresce iteffamente il numero delle condizioni, che devono avere gli esponenti delle equazioni, acciò sieno riducibili al metodo del num. 14. Prendo l'equazione canonica di quattro termini $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx + cx^r y^t dy + fx^e y^u dy$. Posta $y = z^t$, $dy = tz^{t-1} dz$, e fatte le sostituzioni, sarà $az^{nt} x^m dx + bz^{qt} x^p dx + tx^{rt} z^{st+t-1} dz + ft x^e z^{tu+t-1} dz$. Deve adunque essere $nt+m = qt+p$, onde si caverà il valore dell'esponente assunto $t = \frac{p-m}{n-q}$. Deve essere pure $r+st +$

$t-1 = qt+p$, o sia $st-qt+t = p-r+1$, e posto il valore di t , sarà $\overline{s-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-r+1} \times \overline{n-q}$, prima condizione. Ma in oltre deve essere $e+tu+t-1 = qt+p$, o sia $tu-qt+t = p-e+1$, e posto il valore di t , $\overline{u-q+1} \times \overline{p-m} = \overline{p-e+1} \times \overline{n-q}$, seconda condizione. Se adunque gli esponenti d'una proposta equazione saranno tali, che ambe le ritrovate condizioni si verifichino, sarà essa riducibile al caso del num.

num. 14., e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}}$.

Se le equazioni avranno cinque termini, le condizioni da verificarsi saranno tre, e così si vada discorrendo.

E S E M P I O .

Sia l'equazione $ay'x dx + byy x^{\frac{1}{2}} dx = cxdy$. Paragonata questa con la canonica, sarà $n = 3$, $m = 1$, $q = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 1$, $s = 0$; e perchè nel presente caso si verifica la condizione $\frac{s-q+1}{p-m} = \frac{p-r+1}{n-q}$, dandoci $-1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, che è una verità, sarà riducibile al metodo del num. 14. l'equazione, e la sostituzione da farsi sarà $y = z^{\frac{p-m}{n-q}} = z^{-\frac{1}{2}}$. Pongo adunque $y = z^{-\frac{1}{2}}$, $dy = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} dz$, $y' = z^{-\frac{1}{2}}$, $yy = z^{-1}$, e fatte le sostituzioni, trovo $az^{-\frac{3}{2}} x dx + bz^{-1} x^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} cxz^{-\frac{1}{2}} dz$, ed eccola ridotta al caso del suddetto numero.

21. Ma senza rapportare le particolari equazioni alle canoniche, tornerà forse più comodo il maneggiarle sole collo stesso metodo.

m m

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia adunque l'equazione $ay^{\frac{1}{3}}x^{\frac{11}{6}}dx - \frac{bx^3dy}{y} = cxydy$. Pongo $x = z^t$, $dx = tz^{t-1}dz$; fatte le sostituzioni, farà $tay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{11t}{6} + t - 1}dz - bz^3y^{-1}dy = cz^{11}ydy$, ma deve essere $\frac{1}{3} + \frac{11t}{6} + t - 1 = 3t - 1$, quindi ricavo $t = 2$, il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $2ay^{\frac{1}{3}}z^{\frac{14}{3}}dz - bz^3y^{-1}dy = cz^{11}ydy$, che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque $x = zz$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $x^{\frac{1}{2}}dx + y^{\frac{4}{3}}dx + x^{\frac{3}{4}}ydy = y^3dy$. Pongo $y = z^t$, e $dy = tz^{t-1}dz$, fatte le sostituzioni, farà $x^{\frac{1}{2}}dx + z^{\frac{4t}{3}}dx + tx^{\frac{3}{4}}z^{t+t-1}dz = tz^{3t+t-1}dz$. Ma deve essere $\frac{1}{2} = \frac{4t}{3}$, quindi ricavo $t = \frac{3}{8}$, il qual

valo-

valore posto in luogo di t mi dà l'equazione

$x^{\frac{1}{2}} dx + z^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{8} x^{\frac{3}{4}} z^{\frac{1}{4}-1} dz = \frac{1}{8} z^{\frac{1}{2}} dz$, che appunto è il caso del numero 14. La sostituzione da farsi è adunque $y = z^{\frac{1}{2}}$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $ayyxxdx + bdx + cyxdx + fx^4yydy = 0$.

Pongo $y = z^t$, $dy = tz^{t-1} dz$; fatte le sostituzioni, farà $az^{2t}xxdx + bdx + cz^t xdx + tfx^4 z^{2t+t-1} dz = 0$. Ma deve essere $2t + 2 = t + 1$, quindi ricavo $t = -1$, il qual valore posto in luogo di t mi dà l'equazione $\frac{axxdx}{z^2} + \frac{bdx}{z} + \frac{cx dx}{z} - \frac{fx^4 dz}{z^2} = 0$, che è appunto il caso del num. 14. La sostituzione da farsi è adunque $y = \frac{1}{z}$.

22. Refo più generale il metodo del num. 14., passo ad un' altro, che è pure generale nel suo genere. Comprende questo tutte quelle equazioni, nelle quali nè le indeterminate, nè i loro differenziali oltrepassano la prima dimensione.

Sia per tanto l'equazione differenziale generale, che abbraccia tutti i casi possibili, ne' quali le variabili, e loro

m m 2

dif-

differenziali non ascendono oltre la prima dimensione $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + bdy = 0$. I coefficienti a, b ec. possono essere affermativi, o negativi, ed anche zero, conforme portano le circostanze dell'equazione particolare, che si vuole costruire. Intorno a questa equazione osservo in primo luogo, che se sarà $c = g$, essendo c, g ambe positive, o ambe negative, l'equazione potrà integrarsi; imperciocchè sarà $\pm c \times ydx + xdy = -axdx - bydy - fdx - bdy$, ed integrando, $\pm cxy = -\frac{axx}{2} - \frac{byy}{2} - fx - by$. Ma non essendo $c = g$, fac-

cio $x = p + A, y = q + B$; le p, q sono due nuove indeterminate, e le A, B due costanti arbitrarie da fissarsi nel progresso. Sarà dunque $dx = dp, dy = dq, xdx = pdp + Adp, ydy = qdq + Bdq$. Collocati questi valori nella equazione principale proposta, nascerà la seguente

$$\begin{aligned} apdp + aAdp + bqdq + bBdq + cqp + gpdp \\ + cBdp + gAdq = 0. \\ + fdp + bdq \end{aligned}$$

Se in questa equazione svanissero i termini secondo, e quarto, sarebbe essa il caso del num. 14., e si saprebbero separare le indeterminate, ma svanirà il secondo termine se sia $aA + CB + f = 0$, ed il quarto se sia $bB + gA + b = 0$; quindi da quelle due equazioni si determinano i valori dell'assunte A, B , talchè la nuova

equa-

equazione sia il caso del suddetto num. 14. Sarà per tanto
 $A = -\frac{cB-f}{a}$, $B = -\frac{gA-b}{b}$, cioè $A = \frac{bf-cb}{cg-ab}$, e

$B = \frac{ab-fg}{cg-ab}$. Se adunque si faranno le sostituzioni

$x = p + \frac{bf-cb}{cg-ab}$, $y = q + \frac{ab-fg}{cg-ab}$, nascerà un' equazio-

ne da maneggiarsi col metodo del num. 14.

Se in una particolar equazione succedesse, che fosse
 $bf=cb$, ovvero $ab=fg$ di modo, che o l' una, o l'altra
 delle costanti assunte fosse zero, sarebbe indizio, potersi
 ottenere l'intento con una sola sostituzione. Sia per ca-
 gion d'esempio $\frac{bf-cb}{cg-ab} = A = 0$; in tal caso, lasciata-

la quantità x colle sue differenze, basterà in luogo di y
 sostituire $q+B$, e proseguire a norma di quanto è stato
 detto di sopra.

Che se fossero nulle ambe le grandezze A , B , in
 sì fatta ipotesi averebbesi $bf=cb$, $ab=fg$, ed in con-
 seguenza $\frac{cb}{b} = \frac{ab}{g} = f$; dunque $cg=ab$, con che non-

hanno più luogo le sostituzioni praticate. Ogni qual volta
 adunque sia $cg=ab$, si faccia la sostituzione $ax+cy=z$,
 e si tolga dall'equazione la y , e dy . Sarà adunque
 $y = \frac{z-ax}{c}$, $dy = \frac{dz-ax}{c}$; fatte le sostituzioni nella

equa-

equazione principale, si avrà $axdx + bzdz - abxdz - abzdx + aabxdx + zdx - axdx +$
 $\frac{c}{c}$

$gxdx - agxdx + flx + \frac{bdz - abdx}{c} = 0$, cioè elidendo

il primo termine col settimo, e riducendo al comun denominatore, $bzdz - abxdz - abzdx + aabxdx + cczdx + egxdz - acgxdx + ccfdx + cbdz - acbdx = 0$; ma poichè $cg = ab$, il secondo termine elide il sesto, ed il quarto il settimo, onde rimane $bzdz - abzdx + cczdx + ccfdx + cbdz = acbdx$, cioè $\frac{bzdz + cbdz}{abz - ccz - ccf + acb} = dx$

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $axdx + 2aydx + bxdy - abdy = 0$:
 Faccio $x = p + A$, $y = q + B$, $dx = dp$, $dy = dq$; fatte le
 sostituzioni, l'equazione sarà

$$apdp + aAdp + 2aqdp + bpdq + bAdq = 0,$$

$$+ 2aBdp \quad - abdq$$

L'ultimo termine svanirà, se sia $bA - ab = 0$, cioè
 $A = a$; svanirà il secondo, se sia $2AB + aA = 0$, cioè
 $B = -\frac{a}{2}$, le sostituzioni sono adunque $x = p + a$, $y = q - \frac{1}{2}a$,
 e l'equazione si riduce al caso del num. 14.

Sva-

Svaniti i suddetti termini nell'equazione, si può essa integrare per mezzo del num. 4. senza servirsi del num. 14.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $2axdx - 2bydy - 4aydx + bxdy - aadx = 0$. In questa il coefficiente $2a$ corrisponde ad a della canonica, $-2b$ alla b , $-4a$ alla c , b alla g , e si dà il caso, che sia $cg = ab$ rispetto alle costanti della canonica; faccio adunque la sostituzione $2ax - 4ay = z$, e però $y = \frac{2ax - z}{4a}$, $dy = \frac{2adx - dz}{4a}$; quindi eliminate

$$\begin{aligned} & \text{le } y, \text{ e } dy, \text{ avremo } 2axdx - \\ & \frac{8aabxdx + 4abzdx + 4abxdz - 2bzdz}{16aa} - 2axdx + zdx + \\ & \frac{2abxdx - bxdz - aadx}{4a} = 0, \text{ cioè } 4abzdx - 2bzdz + \\ & 16aazdx - 16a^2dx = 0, \text{ e però } dx = \frac{-2bzdz}{4abz + 16aaz - 16a^2} \end{aligned}$$

23. Si le notate equazioni, come quelle ancora di grado superiore, possono maneggiarsi per mezzo di una sola, ma più composta sostituzione. Ripiglio l'equazione canonica di sopra $axdx + bydy + cydx + gxdy + fdx + bdy = 0$, perchè quelle di grado superiore portano a calcoli troppo lunghi, e ciò, che dirò intorno a questa; ba-

basterà per far vedere , come debbano quelle trattarsi . Pongo adunque $x = Ay + p + B$, nella quale equazione sussidiaria la p è una nuova indeterminata , a cui non si prefigge costante alcuna , perchè sarebbe superflua , come si può conoscere , facendo l'operazione ; le A , B sono due costanti da fissarsi nel progresso . Posta adunque $x = Ay + p + B$, sarà $dx = A dy + dp$, $x dx = A Ay dy + A p dy + AB dy + Ay dp + p dp + B dp$, quindi surrogati questi valori nell' equazione canonica , sarà essa trasformata nella seguente

$$\begin{array}{rcl} aA Ay dy + aA p dy + aA y dp + a p dp + aAB dy + aB dp \\ by dy + gp dy + cy dp & + & gB dy + fdp = 0. \\ cAy dy & + & fAy \\ gAy dy & + & bdy \end{array}$$

Convien dunque procurare di fare svanire alcuni termini di questa equazione, fissando opportunamente le arbitrarie assunte A , B , e con ciò renderla capace del fine , che si pretende; quando però si verificchino alcune condizioni , che nascono da' valori delle A , B . Se adunque mancassero i due termini secondo , e terzo , farebbero separate le variabili , ed integrabile l' equazione . Ma acciò sieno nulli essi due termini , bisogna , che sia $aA + g = 0$ rispetto al secondo , ed $aA + c = 0$ rispetto al terzo , ed in conseguenza $g = c$; ma posto ciò , l' equazione principale era già integrabile senza l' ajuto d' alcuna operazione .

Se

Se fossero nulli i due ultimi termini, l'equazione sarebbe ridotta al canone del num. 14., ma acciò essi spariscano, convien, che sia $aB + f = 0$ rispetto all'ultimo, cioè $B = -\frac{f}{a}$, ed $aAB + gB + fA + b = 0$ rispetto al quin-

to, ma surrogato il valore di B , farà $-Af - \frac{gf}{a} + Af + b = 0$, cioè $ab = gf$. Non possono adunque sparire gli ultimi due termini, e così per essi ridursi l'equazione, se non nel caso particolare, che si verifichi la condizione $ab = gf$.

Si procuri adunque di togliere il primo, e quinto termine, con che l'equazione sarà ridotta al caso de' numeri 4., e 6. Adunque sarà rispetto al primo termine $aAA + b + cA + gA = 0$, cioè $AA + \frac{cA + gA}{a} = -\frac{b}{a}$,

da cui si ricaverà il valore dell'assunta A ; trovato questo, scoprirassi quello di B dal quinto termine, e farà $B = -\frac{fA - b}{aA + g}$, e la nuova equazione verrà ad essere

$\frac{aA + g}{aA + g} \times pdy + \frac{aA + c}{aA + g} \times ydp = -apdp - aBdp - fdp$, che si costruirà per mezzo del num. 4., se i coefficienti de' due primi termini faranno ambi positivi, o negativi; e per mezzo del num. 6., se uno sia positivo, negativo l'altro.

n n

Ma

Ma per ottenere la bramata separazione, basterà far svanire il primo termine dall'equazione sussidiaria, ponendo $aA + cA + gA + b = 0$, mentre posta $= 0$ la costante assunta B , che in questo caso riesce superflua, resterà l'equazione $-apdp - fdp = \overline{aA + g} \times pdy + \overline{fA + b} \times dy + \overline{aA + c} \times ydp$, nella quale si separano le variabili col metodo, che prenderò a spiegare nel numero, che siegue; o pure con l'antecedente per mezzo di una facile preparazione, cioè facendo $\overline{Aa + g} \times p + \overline{fA + b} = q$, e differenziando $\overline{Aa + g} \times dp = dq$; dunque sostituendo, $-apdp - fdp = qdy + \overline{Aa + c} \times ydq$. Si dee

però riflettere, che nel fare uso di queste formole bene spesso s'insinuano le quantità immaginarie nascenti dalla equazione quadratica affetta dal lato $aA + cA + gA + b = 0$; ed esse non solo si rinvencono nelle grandezze coefficienti, ma passano talvolta negli esponenti; e perchè fin ora non si fanno maneggiare, fa d'uopo evitarle, e fra varj metodi valersi di quello, che più cade in acconcio.

E S E M P I O .

Sia l'equazione $abxxdx + bbyxdx + a'ydx + aabydy + a'xdy = 0$. Pongo $y = Ax + p + B$ (sostituisco in luogo della y piuttosto, che della x , perchè preveggo il calcolo più breve) adunque $dy = Adx + dp$. Fatte pertanto le sostituzioni, averassi l'equazione

$$abxxdx + bbyxdx + bbBxdx + a'pdx + a'Bdx + aabAx dp + aabp dp + aabBdp + abAxxdx + 2a'Ax dx + aabA p dx + aabB dx + a'x dp + aabA A dx = 0.$$

Osservo, che se in questa equazione sparissero i termini 1, 3, 5, e 6., avrebbonli le indeterminate separabili, perchè farebbe

$$bbpdx + a'pdx + aabp dp + aabBdp = 0,$$

e dividendo per p ,

$$bbxdx + a'dx + aabAdx = -aabdp - \frac{aabBdp}{p}.$$

Acciò adunque sparisca il primo, bisogna, che sia $a + bA = 0$, cioè $A = -\frac{a}{b}$, e con ciò spariscono pure il quinto, e

sesto senza, che nasca condizione alcuna. Acciò sparisca il terzo, conviene, che sia $bbB + 2a'A + aabAA = 0$, e surrogato il valore di A , $bbB - \frac{2a^2}{b} + \frac{a^2b}{bb} = 0$, cioè

$$nn 2$$

$$B =$$

$B = \frac{a^4}{b^3}$. La sostituzione adunque farà $y = -\frac{ax}{b} + p + \frac{a^4}{b^3}$,

e l'equazione, che indi nasce, $bbx dx = -aabdp - \frac{a^4 dp}{bbp}$,

24. Consiste il metodo di questo numero nel disporre primieramente l'equazione proposta in maniera, che le quantità differenziali restino accompagnate rispettivamente dalle loro indeterminate, e si faccia, per così dire, una dimezzata separazione, rigettando ne' comuni moltiplicatori, o divisori quelle grandezze, che turbano l'operazione; indi presa la sommatoria della differenziale così preparata composta di due incognite, si deve porre eguale ad una variabile assunta, e col mezzo d'una equazione ausiliaria dare una nuova forma alla principale. Finalmente fatta osservazione a ciò, che succede, deve rinnovarsi l'operazione sino a tanto, che si conseguisca la bramata separazione, o si veggia essere la formola superiore alla nostra industria.

A di vantaggio questo metodo sopra degli altri, che valendosi noi delle sostituzioni, nel tempo stesso ci insegna, quali sieno le legittime, e quali le inutili. Si offervi però, esservi delle equazioni, che non ammettono l'artificio del presente metodo, se prima non vengano con qualche industria preparate. Il tutto s'intenderà meglio dagli esempj.

ESEM-

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione

$$\frac{x' dy + y' dx}{xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}} = dz, \text{ nella quale la } dz \text{ è una}$$

funzione qualunque di x , ovvero di y . Metto da parte la quantità $xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}$, che è una affezione comune a due termini, che compongono la prima parte dell'equazione, resterà la differenziale nuda $x' dy + y' dx$. Divido dx per x' , dy per y' , e però sarà $x' dy + y' dx = x' y' \times \frac{dy + dx}{y' x'}$, onde la proposta

equazione prenderà il nuovo aspetto

$$\frac{x' y'}{xx + yy \sqrt{xx + yy - xxyy}} \times \frac{dx + dy}{x' y'} = dz. \text{ Ottenuta}$$

questa dimezzata separazione, in cui le flussioni dx , dy vengono combinate semplicemente colle funzioni delle loro fluenti, o sia variabili x' , y' , e gli altri termini costituiscono una quantità quasi estranea, che fa figura di moltiplicatore; pongo $\frac{dx + dy}{x' y'} = -\frac{dp}{a'}$, e però integrando $\frac{a'}{2xx} + \frac{a'}{2yy} = p$,

quindi ritrovato il valore, per esempio di $x = \frac{y}{\sqrt{2yyp - a'}}$,

e

e sostituito questo in luogo di x , e $-\frac{dp}{a'}$ in luogo di

$$\frac{dx}{x'} + \frac{dy}{y'} \text{ nell'equazione, farà essa } -\frac{dp \times a \sqrt{a}}{2p \sqrt{2p-a}}, dz,$$

il che ec.

Raccogliasi, che presa ad arbitrio una quantità in qualsivoglia modo data per p , come $p = \frac{a}{2qq}$, farà $\frac{a}{2qq} = \frac{a}{2xx} + \frac{a}{2yy}$, cioè $q = \frac{xy}{\sqrt{xx+yy}}$, con che in un batter d'occhio si

scoprono le infinite sostituzioni, che servono alla bramata separazione. Tutte le altre possibili sono inutili, e lasciano le variabili più di prima confuse.

Si noti di più, che colle spiegate sostituzioni spesse volte accade, che in un membro dell'equazione ci resti qualche funzione dell'una, o dell'altra variabile x , o pure y ; nel qual caso se la dz fosse data per la variabile, di cui resta la funzione, una semplice divisione supplirebbe al bisogno.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{2ydy + xdy + ydx}{a+x+y} = dz$, in cui la dz

sia data in qualsivoglia modo per y . Per ridurre al metodo

todo questa equazione, prendo l'integrale del numeratore della frazione, cioè $yy + xy$, e lo pongo $= p$, quindi fatta svanire dall'equazione la x , e dx , collocandovi il suo valore, è la nuova equazione $\frac{dp}{a + \frac{p}{y}} = dz$,

che si riduce alla seguente $ydp - pdz = aydz$; e questa preparata secondo il metodo, si trova essere $p \times \frac{\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}}{\frac{p}{y}} = adz$.

Faccio $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y} = \frac{dq}{q}$, e però $lp - \int \frac{dz}{y} = lq$; pongo in oltre $\int \frac{dz}{y} = ulm$, (lm è un logaritmo costante) sarà

$lp - lq = ulm$, e passando dalle quantità logaritmiche alle esponenziali, $\frac{p}{q} = m^u$. Fatte adunque nell'equazio-

ne ridotta le sostituzioni di $\frac{dq}{q}$ in luogo di $\frac{dp}{p} - \frac{dz}{y}$, e di $m^u q$ in luogo di p , farà $m^u dq = adz$, cioè $dq = \frac{adz}{m^u}$,

in cui sono separate le variabili, per essere tanto dz , quanto m^u date per y , il che ec.

ESEM-

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $\frac{zxzdx + xydy + yydx}{x^2 + xxyy + a^2} = \frac{zdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$.

Prima di tentare questa formola farà bene ridurla. Osservo, che il secondo membro è integrabile, e la sua sommatoria è $\sqrt{xx + yy}$. (num. 10.) Pongo per tanto $\sqrt{xx + yy} = z$, e fatta svanire la y , atteso che le sue funzioni montano al quadrato, collocando $zz - xx$ in luogo di yy , e $zdz - xdx$ in luogo di ydy , avremo l'equazione $\frac{zxzdx + xzdz - xxdx + zzdx - xxdx}{xxzz + a^2} = dz$,

cioè $\frac{xzdz + zzdx}{xxzz + a^2} = dz$, la quale preparata al solito farà

$z \times xdz + zdx = dz$. Faccio $xz + zdx = dp$, ed

integrando $xz = p$, e fatta svanire la x , avremo

$\frac{zdp}{pp + aa} = dz$, e finalmente $\frac{dp}{pp + aa} = \frac{dz}{z}$, il che ec.

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione ultima dell' antecedente numero
 $-apdp - fdp = aA + g \times pdy + fA + b \times dy + aA + c \times ydp$,
 che ô promesso di costruire. Preparata questa secondo
 il metodo, e fatto per brevità $aA + g = e$, $fA + b = m$,
 $aA + c = n$, si riduce ad essere

$$-\frac{apdp - fdp}{ep + m} = y \times \frac{dy}{y} + \frac{ndp}{ep + m}. \text{ Pongo adunque } \frac{dy}{y} +$$

$$\frac{ndp}{ep + m} = \frac{dq}{q}, \text{ ed integrando } ly + \frac{n}{e} lp + \frac{m}{e} = lq, \text{ e però}$$

$$y = \frac{q}{p + \frac{m}{e}}, \text{ e fatta svanire la } y, \text{ averassi}$$

$$\frac{q}{p + \frac{m}{e}}$$

$$-\frac{apdy - fdp}{ep + m} = \frac{dq}{\frac{q}{p + \frac{m}{e}}}, \text{ cioè } -\frac{apdp - fdp}{ep + m} \times p + \frac{m}{e} = dq,$$

il che cc.

ESEMPIO V.

Sia l'equazione già preparata

$$y^m \times \frac{xdx + ydy}{x^n} = x^n \times \frac{ydx - xdy}{yy}, \text{ che scrivo così}$$

$$\frac{y^{m-2}}{x^n} \times \frac{xdx + ydy}{yy} = \frac{ydx - xdy}{yy}, \text{ a fine di rendere in-}$$

tegrabile il secondo membro. In questa farò uso d'una doppia sostituzione, e però pongo $xdx + ydy = pdp$, ed integrando, $xx + yy = pp$; pongo in oltre $\frac{ydx - xdy}{yy} = dq$,

ed integrando $\frac{x}{y} = q$. Fatte le sostituzioni, averassi

$$\frac{y^{m-2}}{x^n} \times pdp = dq; \text{ ma } yy = pp - xx, \text{ ed } xx = qqyy,$$

adunque sarà $yy = pp - qqyy$, cioè $yy = \frac{pp}{aa + qq}$, ed

$$y^{m-2} = \frac{p^{m-2}}{aa + qq^{\frac{m-2}{2}}}, \quad x^n = \frac{q^n p^n}{aa + qq^{\frac{n}{2}}}; \text{ sostituiti per tanto}$$

questi valori di y^{m-2} , e di x^n , averassi $p^{m-n-1} dp =$

$$q^n dq \times \frac{m-n-1}{aa + qq^{\frac{m-n-1}{2}}}, \text{ il che ec.}$$

ESEMPIO VI.

Sia l'equazione $\frac{2xdy - 2ydx}{x - y} = dz$, in cui dz è data

in qualsivoglia modo per x , o per y . Osservo, che il numeratore del primo membro $2xdy - 2ydx$ è integrabile quando si divida per xx , ed il suo integrale è $\frac{2y}{x}$, e però dispongo l'equazione così

$$\frac{1}{x - y} \times \frac{2xdy - 2ydx}{xx} = \frac{dz}{xx}; \text{pongo } \frac{2y}{x} = p, \text{ onde}$$

farà $\frac{2xdy - 2ydx}{xx} = dp$, e l'equazione si muterà nella

$$\text{seguente } \frac{dp}{x - y} = \frac{dz}{xx}; \text{ ma } 2y = px, \text{ ed } yy = \frac{ppxx}{4},$$

$$\text{dunque fatte le sostituzioni, } \frac{dp}{xx - pxx + \frac{ppxx}{4}} = \frac{dz}{xx},$$

$$\text{e moltiplicando per } xx, \frac{dp}{1 - p + \frac{pp}{4}} = dz, \text{ in cui sono}$$

separate le variabili. Passo avanti all'integrazione, e

però sarà $\frac{z}{1-\frac{p}{2}} + c = \int dz$; e posto il valore di p ,

$$\frac{z}{1-\frac{y}{x}} + c = \int dz, \text{ e riducendo al comun denomina-}$$

tore, $\frac{zx + cx - cy}{x-y} = \int dz$. Posta la costante $c=0$, avremo $\frac{zx}{x-y} = \int dz$; posta $c=-2$, sarà $\frac{2y}{x-y} = \int dz$, altro integrale della proposta formola diverso dal primo; posta finalmente $c=-1$, nascerà il terzo integrale $\frac{x+y}{x-y} = \int dz$.

25. Il metodo, che ora prendo a spiegare; quantunque molto limitato, è però di grande uso ne' casi particolari. Con questo si separano le variabili nell'equazione canonica $ady = y^p dx + by^n qdx$, in cui le quantità p, q s'intendono date in qualunque modo per x ; le a, b sono costanti, i segni possono essere positivi, e negativi a piacere, e l'esponente n può essere intero, rotto, positivo, negativo, ed anco zero. Sia adunque l'equazione $ady = y^p dx + by^n qdx$. Si faccia $y = zu$, (z , ed u sono due nuove variabili) e differenziando, $dy = zdu + udz$, e sostituendo in luogo di dy , di y , e di y^n i valori $zdu + udz$, uz , $u^n z^n$, averassi l'equazione $azdu + audz = uzpdx + bz^n u^n qdx$, nella quale se due termini sparissero,

fi

si separerebbero le indeterminate. Per far ciò si fanga un' equazione tra due termini $audz = uzpdx$, dunque

$\frac{adz}{z} = pdx$, ed integrando, $alz = \int pdx$, e passando da'

logaritmi alle quantità esponenziali, $z^a = m^{\int pdx}$, o sia

$z = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, supposta l'unità $= 1m$. Quest' ultima equazione mi mostra il valore di z , e m' insegna, che per ridurre l' equazione proposta a due soli termini, e fare, che gl' altri due si distruggano, si doveva in vece di

$y = zu$ porre $y = um^{\frac{\int pdx}{a}}$, cioè $\frac{ly}{u} = m^{\frac{\int pdx}{a}}$, o sia $ly - lu =$

$\int \frac{pdx}{a}$, e differenziando, $\frac{ady}{y} - \frac{adu}{u} = pdx$, e però $ady =$
 $ypdx + \frac{aylu}{u}$. Sostituisco adunque nell' equazione canoni-

ca $ady = ypdx + by^n qdx$ in luogo di dy il valore ritrovato, e farà $ypdx + \frac{aydu}{u} = ypdx + by^n qdx$, cioè $\frac{aydu}{u} =$

$by^n qdx$, e però $\frac{adu}{u} = by^{n-1} qdx$; ma $y = zu$, ed

$y^{n-1} = z^{n-1} u^{n-1}$, onde finalmente $\frac{adu}{u^n} = bz^{n-1} qdx$,

equazione in cui sono separate le variabili, per essersi trovata la z data per x . Quando siasi giunto all' equazione $alz = \int pdx$, egli è certo, che se p data per

x

x sarà tale , che l'integrale $\int p dx$ dipenda dalla quadratura dell'iperbola , o sia da' logaritmi , e la quantità a sia un numero qualunque , farà algebrica la relazione di z ad x , ed in ogni altro caso trascendente .

E qui si osservi , acciò una data equazione sia il caso della formola canonica , essere necessario , che si adempiano le seguenti condizioni , cioè che la differenza dy possa restar da se sola , o al più moltiplicata per una costante in una parte dell'equazione ; che nell'altra parte dell'equazione il primo termine contenga la differenza dx moltiplicata per qual si sia funzione di x espressa per p , e per l'indeterminata y , che nell'altro termine la quantità $q dx$ data per x venga moltiplicata per una dignità di y ; in una parola , fatta la divisione per y , si richiede , che da una parte dell'equazione resti la flussione logaritmica $\frac{ady}{y}$, e nell'

altra il primo termine sia libero dall'indeterminata y , ed il secondo moltiplicato per la dignità y^{n-1} . Mancando l'uno de'premessi requisiti , non à più luogo questo metodo , come non lo avrebbe nelle seguenti equazioni $ady = yypdx + byqdx$, $ady = ypdx + ayy + y' \times qdx$.

Alcune formole però si riducono con tutta facilità al canone col solo prepararle . Per esempio sia l'equazione $ady = ypdx + byqdx + yyqdx$; fatta riflessione , che
la

la quantità $pdx + bqdx$ viene moltiplicata per y , e che il binomio $p + bq$ è dato per x di maniera, che si può in sua vece surrogare la quantità r data ugualmente per x , l'espressione si muterà nella seguente $ady = yrdx + yyqdx$, in cui trova luogo il metodo spiegato, e ciò basterà per indicare il modo d'operare in simili casi.

E S E M P I O I.

Sia l'equazione $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$. Pongo $y = zu$, e però $ady = azdu + audz$; e fatte le debite sostituzioni, avremo $azdu + audz = \frac{fuzdx}{x} + zzuudx$. Sia $audz = \frac{fuzdx}{x}$, cioè $\frac{adz}{z} = \frac{f dx}{x}$, integrando sarà $a \log z = f \log x$, e però $z^a = x^f$.

Se le costanti a, f saranno numeri razionali interi, rotti, affermativi, o negativi, la z sarà data algebricamente per x . Sia per esempio $a=1, f=2$, così che sia $z = xx$. Dunque dileguandosi i termini $audz, \frac{fuzdx}{x}$, resteranno i due $azdu = zzuudx$, ma $z = xx$, dunque sarà $\frac{adu}{uu} = xx dx$, equazione, in cui sono separate le variabili.

Passan-

Passando all'integrazione, farà $-\frac{a}{u} + c = \frac{x^1}{3}$, ma
 $u = \frac{y}{x} = \frac{y}{xx}$, adunque $-\frac{axx}{y} + c = \frac{x^1}{3}$, cioè $3cy -$
 $3axx = x^1y$, che è l'equazione algebrica nascosta sotto
 la differenziale proposta.

E S E M P I O II.

Sia l'equazione $dy = \frac{aydx}{xx-aa} + \frac{y^1dx}{x^1}$. Faccio, come
 sopra, $y = zu$, e $dy = zdu + u dz$, e però fatte le sostitu-
 zioni, averassi l'equazione $zdu + u dz = \frac{azudx}{xx-aa} +$
 $\frac{z^1u^1dx}{x^1}$, e supposto $udz = \frac{azudx}{xx-aa}$, cioè $\frac{dz}{z} = \frac{adx}{xx-aa}$, cioè
 $z = m^{\int \frac{adx}{xx-aa}}$, averassi l'equazione $zdu = \frac{z^1u^1dx}{x^1}$, o sia
 $\frac{du}{u^1} = \frac{zdx}{x^1}$, in cui sono separate le variabili, essendo z
 data per x . Ma si osservi, che la quantità $\frac{adx}{xx-aa}$ si
 può ridurre ad una flussione logaritmica ponendo $x =$
 $\frac{a+n}{a-n} \times a$, poichè fatte le sostituzioni debite, farà
 adx

$\frac{adx}{xx-aa} = \frac{dn}{2n}$, quindi $\frac{dz}{z} = \frac{dn}{2n}$, e però $zz = n =$
 $\frac{a \times x - a}{x + a}$, e posto questo valore in luogo di zz nell'
 equazione finale, averassi $\frac{du}{u} = \frac{axdx - aadx}{x^2 + ax^2}$, il che ec.

Senza fare la sostituzione di $x = \frac{a+n}{a-n} \times a$, si può
 ridurre la quantità $\frac{adx}{xx-aa}$ ad una flussione logaritmica
 per mezzo del num. 21. del Libro III., ed averassi
 $\frac{adx}{xx-aa} = -\frac{dx}{2 \times x + a} + \frac{dx}{2 \times x - a} = \frac{dz}{z}$, ed in conseguen-
 za $zz = \frac{x-a}{x+a}$.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $dy = -\frac{ydx}{x} + y^m dx$. Faccio $y = zu$,
 $dy = zdu + udz$; adunque sostituendo, $zdu + udz =$
 $-\frac{uzdx}{x} + u^m z^m dx$. Suppongasi $udz = -\frac{uzdx}{x}$, o sia
 $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$, ed integrando, $z = \frac{a}{x}$; avrassi l'equazione,

P P

$zdu =$

$$zdu = z^m u^m dx, \text{ cioè } \frac{du}{u^m} = z^{m-1} dx, \text{ o sia } \frac{du}{u^m} = \frac{a^{m-1} dx}{x^{m-1}}.$$

ESEMPIO IV.

Qualche volta è necessaria una doppia operazione, come in certe equazioni, che hanno più di tre termini. Sia pertanto l'equazione $xy + ydx = adu + xdu$, e s'intenda u data in qualunque modo per la y . Dispongo l'equazione nella seguente maniera $adu + xdu - xdy = ydx$, o pure $\frac{adu}{y} + \frac{xdu}{y} - \frac{xdy}{y} = dx$; pongo $x = pq$, e $dx = pdq + qdp$, onde fatte le sostituzioni, farà $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq + qdp$. Chi volesse ridurre con una sola operazione la formola, bisognerebbe porre $\frac{pqdu}{y} - \frac{pqdy}{y} = pdq$, cioè $\frac{du}{y} - \frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, con che si scopre la q data per y ; ma più elegantemente si opererà nel seguente modo. Facciasi $-\frac{pqdy}{y} = pdq$, dunque $-\frac{dy}{y} = \frac{dq}{q}$, ed integrando, $\frac{a}{y} = q$; presi pertanto gli altri termini dell'equazione $\frac{adu}{y} + \frac{pqdu}{y} = qdp$, ed in vece di q posto il valore $\frac{a}{y}$, farà

farà $\frac{adu}{y} + \frac{apdu}{yy} = \frac{adp}{y}$, cioè $\frac{du}{y} + \frac{pdu}{y} = \frac{dp}{y}$. Sia $p = mn$, dunque $dp = mdn + ndm$, e fatta la sostituzione, $\frac{du}{y} + \frac{mndu}{y} = \frac{mdn}{y} + \frac{ndm}{y}$; si supponga $\frac{mndu}{y} = \frac{mdn}{y}$, cioè $\frac{du}{y} = \frac{dn}{n}$, farà dunque n data per y , e nell'equazione restante, dopo essere svaniti i termini $\frac{mndu}{y}$, $\frac{mdn}{y}$, cioè nell'equazione $du = ndm$ faranno separate le variabili, e farà $\frac{du}{n} = dm$.

26. In altra maniera ancora si possono separare le variabili nell'equazione canonica $dy = pydx + qy^ndx$. Si faccia $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$, $dx = \frac{dz}{1-n \times pz}$; fatte le sostituzioni, farà $dy = \frac{ydz}{1-n \times z} + \frac{qy^ndz}{1-n \times pz}$, cioè $dy =$

$\frac{pydz + qy^ndz}{1-n \times pz}$, o sia $1-n \times pzydy = pydz + qy^ndz$, e però $\frac{1-n \times zdy - ydz}{y^n} = \frac{qdz}{p}$, dividendo per py^n , e finalmente dividendo per zz , farà

$\frac{1-n \times zy^{1-n}dy - y^{1-n}dz}{z^2} = \frac{qdz}{p^2z}$, ed integrando;
 $y^{\frac{1-n}{n}} = \int \frac{qdz}{p^2z}$, cioè $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{p^2z}$; e poichè le p ,

pp z c

e q si suppongono date per x , e la z pure, per la sostituzione $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$, è data per x , almeno

$$1 - n \times z$$

trascendentemente, faranno separate le variabili.

Ripresa adunque l'equazione dell'esempio primo $ady = \frac{fydx}{x} + yydx$, vale a dire $dy = \frac{fydx}{ax} + \frac{yydx}{a}$, farà $p = \frac{f}{ax}$, $q = \frac{1}{a}$, $n = 2$; quindi surrogati questi valori nell'equazione finale $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$, farà essa $\frac{1}{y} = z \int \frac{x dz}{fzx}$, e la sostituzione $pdx = \frac{dz}{1-n \times z}$ farà $\frac{f dx}{ax} = -\frac{dz}{z}$, e posta $f=2$, $a=1$, avremo $\frac{2dx}{x} = -\frac{dz}{z}$, cioè $z = \frac{1}{xx}$, e però $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \int -xx dx$; ed integrando, $\frac{1}{y} = \frac{1}{xx} \times -\frac{1}{2} x^2 + c$, cioè $3cy - 3xx = x^2 y$, come prima. Isteffamente si discorra degli altri esempj.

E S E M P I O V.

Sia l'equazione $ax^nydy - bx^nydy = ayyx'dx - byyx'dx + a^ndx - x^ndx$, la quale divisa per $ax^ny - bx^ny$, si trova essere $dy = \frac{ydx}{x} + \frac{a^ndx - x^ndx}{ax^ny - bx^ny}$, che è il caso

dell'equazione canonica. Sarà adunque $p = \frac{1}{x}$, $q =$

$$\frac{a^n - x^n}{ax^n - bx^n}, n = -1, \text{ e per la sostituzione } p dx = \frac{dz}{1-n \times z},$$

farà $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{1-z}$, quindi $z = \frac{x}{x+1}$; onde posti questi valori

nell'equazione finale canonica $y^{1-n} = z \int \frac{qdz}{pzz}$, avere-

mo $yy = \frac{x}{x+1} \int \frac{a^n - x^n}{ax^n - bx^n} \times \frac{1}{x} dx$, in cui sono separate le

variabili.

27. Se l'equazione canonica fosse $y^{n-1} dy = p dx + q y^n dx$, essendo parimente le p , e q date in qualunque modo per x , si separano le indeterminate, ponendo $q dx = \frac{dz}{nz}$, e $dx = \frac{dz}{nqx}$; imperciocchè fatte le sostituzioni,

farà

farà $y^{n-1} dy = \frac{p dz}{nqz} + \frac{y^n dz}{nz}$, cioè $\frac{nzy^{n-1} dy - y^n dz}{z} = \frac{p dz}{qz}$, e dividendo per z , $\frac{nzy^{n-1} dy - y^n dz}{z^2} = \frac{p dz}{qz^2}$, ed integrando, $\frac{y^n}{z} = \int \frac{p dz}{qz^2}$, cioè $y^n = z \int \frac{p dz}{qz^2}$, equazione, in cui sono separate le variabili.

E S E M P I O .

Sia l'equazione $2aaxydy = aayydx + 2bx^1 dx$, cioè $ydy = \frac{bx dx}{ax} + \frac{yy dx}{2x}$. Sarà $n = 2$, $p = \frac{bx}{ax}$, $q = \frac{1}{2x}$, e però avremo $\frac{yy}{x} = \int \frac{2bx^1 dz}{axz}$; ma $qdx = \frac{dx}{2x} = \frac{dz}{2z}$, ed $x = z$, adunque sarà $\frac{yy}{x} = \int \frac{2bx dx}{ax}$, ed integrando, $\frac{yy}{x} = \frac{bx}{ax} \pm c$, curva algebrica.

Potevasi anche costruire la formola generale; $y^{n-1} dy = p dx + q y^n dx$, ed in conseguenza la particolare dell'esempio per mezzo del metodo del num. 24.

28. Aggiungo una riflessione prima di finire questo Capo, cioè che tal volta si sviluppano le indeterminate miste, e confuse colle quantità differenziali, quando

do ci venga permesso di modificare le grandezze coefficienti, e ciò specialmente succede quando gli esponenti si formano dalli coefficienti, così portando il giro della riduzione. 'A principalmente luogo questo artificio ne' Problemi Fisico-Matematici, ne' quali accoppiandosi grandezze di genere affatto diverso, siamo in maggior libertà di servirsi di quelle quantità costanti, che meglio vengono al proposito.

Per un esempio mi propongo l'equazione $x^m dx + by + yy \times \frac{cdx}{x} = y dy$, la quale preparata giusta il metodo

del num. 24. farà $x^m dx + \frac{bcdx}{x} = yy \times \frac{dy - \frac{cdx}{x}}$. Faccio

adunque $\frac{dy}{y} - \frac{cdx}{x} = \frac{dp}{p}$, ed ô il valore di $y = px^c$,

ed $yy = p^2 x^{2c}$. Questi valori opportunamente sostituiti mi danno l'equazione $x^m dx + bcp x^{c-1} dx = x^{2c} p dp$, e dividendo per x^{2c} , farà $x^{m-2c} dx + bcp x^{c-1-2c} dx = p dp$. Egli è evidente, che data l'eguaglianza fra gli esponenti della indeterminata x , cioè fra $m - 2c$, e $c - 1$, le incognite sono separate, avendosi solamente a dividere l'omogeneo di comparazione $p dp$ per il binomio $1 + bcp$. Ora posto $m - 2c = -c - 1$, ne segue, che sia $m + 1 = c$, quindi esposta la costante c per $m + 1$, abbiamo l'intento. Se la c fa figura di unità, il che non ci è vietato di supporre, farà $m = 0$; e se $c = 2$,
 farà

farà $m = 1$, e così vadasi discorrendo.

L'artifizio spiegato si applichi a tutte le altre equazioni di simil genere, per esempio alla seguente

$$x^m dx + \frac{cby^n dx}{x} + \frac{gy^r dx}{x} = y^t dy, \text{ posto però } t = r - 1,$$

ovvero $= n - 1$, onde si possa abbreviare la formola usando i logaritmi.



CAPO

C A P O I I I.

*Della Costruzione d'altre Equazioni più limitate
per mezzo di varie sostituzioni.*

29. **SI** separeranno sempre le indeterminate nell'equazione $x^n dx \pm ay^n dy \times p = xdy - ydx \times q$, nella quale le p , e q sono date promiscuamente per x , ed y in qualunque modo, purchè algebricamente, quando però in ogni termine della quantità p la somma degli esponenti di x , ed y sia la stessa, e così la stessa sia in ogni termine della quantità q ; non richiedendosi però, che sia la medesima in p , ed in q . Le sostituzioni da farsi sono $y = tz^{\frac{1}{n+1}}$, $x = t \times \frac{1}{a^{\frac{1}{n+1}} \mp azz^{\frac{1}{n+1}}}$. Surrogati i rispettivi valori in luogo di x , dx , y , dy , e fatte le debite operazioni, arriverassi dopo lunghissimo calcolo alla seguente equazione

$$t^{n-1} dt = \frac{z^{\frac{1-n}{n+1}} dz \times q}{\frac{n}{a^{\frac{1}{n+1}} \mp azz^{\frac{1}{n+1}}} p}.$$

Ma poichè si fa, che in ciascun termine di p la somma degli esponenti di x , ed y è eguale, siccome

qq pure

pure in ciascun termine di q , fatte in essi ancora le sostituzioni de' valori dati per t , e per z , in ciascun termine di p , averà t la medesima potestà, siccome pure in ciascun termine di q una medesima potestà, vale a dire, che farà l'omogeneo di comparazione moltiplicato per una potestà positiva, o negativa di t , cioè farà per essa potestà diviso, o moltiplicato il primo membro, e però separate le variabili.

E S E M P I O.

Sia l'equazione $\overline{xdx + aydy} \sqrt{y} = \overline{xdy - ydx} \sqrt{a}$; farà $n = 1$, $p = \sqrt{y}$; $q = \sqrt{a}$, e però $\frac{dt}{t} = \frac{dz \sqrt{a}}{\sqrt{a^3 - azz} \sqrt{y}}$,

ma $y = tz^{\frac{2}{1-1}} = tz$; adunque farà $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{dz \sqrt{a}}{\sqrt{a^3 z - az^3}}$.

Nella stessa equazione si separano le indeterminate, quando anche sia negativo l'esponente n , cioè quando sia l'equazione $\overline{x^{-n} dx \pm ay^{-n} dy} \times p = \overline{xdy - ydx} \times q$, e le sostituzioni sono $y = tz^{\frac{2}{1-n}}$, $x = t \times \overline{a^{\frac{1}{1-n}} \mp azz^{\frac{1}{1-n}}}$;

le

le quali ci danno l'equazione

$$t^{-n-1} dt = \frac{z^{\frac{1+n}{1-n}} dz \times q}{a^{\frac{1+n}{1-n}} + azz^{\frac{-n}{1-n}} p}, \text{ la stessa di quella di}$$

sopra, mutati i segni alla n .

E poichè l'equazione è anche esprimibile così:

$$y^n dx \pm ax^n dy \times \frac{p}{x^n y^n} = x dy - y dx \times q, \text{ ne viene, che}$$

questa pure per la stessa sostituzione è costruibile.

30. Sia più generalmente l'equazione

$$x^n dx \pm ay^{\frac{-n-1-c}{c}} dy \times p = x dy + cy dx \times q. \text{ Si separa-}$$

no sempre le variabili, fatte le sostituzioni di $y = t^r z^{\frac{r}{n+1}}$,

$x = t^{\frac{-r}{c}} \times a \pm acz^{\frac{-r}{c} \frac{1}{n+1}}$, (s , ed r sono numeri a piacere) supposta però la condizione, che le quantità p , q sieno date algebricamente, e in modo tale, che in ciascun termine della quantità p l'esponente della y preso tante volte, quanto è il numero c , superi, o sia superato dall'esponente della x col medesimo eccesso, e così in ciascun termine della quantità q , non importando poi, che l'eccesso in p sia lo stesso, che in q .

qq 2

Così,

Così, per esempio, essendo $c = 3$, sia $p = byx^4 + fy^2x^{15}$ ec., e q sia $= gy^{\frac{1}{2}}x^1 - by^{10}x^2$ ec. E' facile a vedere, che la c non può essere zero.

Fatte le debite sostituzioni in luogo della x , e della y nell'equazione proposta, avremo la seguente equazione

$$-\frac{1}{t} t^{\frac{-m-c-es}{c}} dt = \frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-n-1}{n+1}} dz \times \frac{q}{p}.$$

$$\frac{n}{-r \frac{n+1}{c}}$$

$$a \pm acz$$

ESEMPIO.

Sia $\overline{xdx + ay^{-1}dy} \times \frac{1}{y} = \overline{xdy + ydx} \times x$. E sia $s = 1$,

$r = 2$, sarà $n = 1$, $c = 1$, $p = \frac{1}{y}$, $q = x$, e fatte le sostituzioni nell'ultima equazione di sopra ritrovata, avremo $-\frac{1}{t} dt = \frac{dz \times xy}{a + az^{-2} \frac{1}{2}}$. Ma per le sostituzioni fat-

te, $x = t^{-1} \times \frac{1}{a + az^{-2} \frac{1}{2}}$, ed $y = tz$, dunque $xy = z \times \frac{1}{a + az^{-2} \frac{1}{2}}$, onde avremo $-\frac{dt}{t^2} = zdz$, il che ec.

31. Ma più generalmente ancora sia l'equazione

$x^n dx \pm ay^c dy \times p = \overline{fx dy + cy dx} \times q$, la quale comprende come casi particolari le due canoniche dei numeri antecedenti, cioè quella del num. 30., quando sia $f=1$; e quella del num. 29., quando sia $f=1$, $c=-1$.

Si separano le indeterminate per mezzo della sot-

tuzione $y = t^{\frac{1}{c}} z f^{\frac{r}{n+1}}$, ed $x = t^{-\frac{1}{c}} \times a \pm \frac{acz}{f^{\frac{r}{n+1}}}$,

essendovi però la condizione circa le quantità p , e q , che in esse l'esponente della y moltiplicato per c superi, o sia superato dall'esponente della x moltiplicato per f col medesimo eccesso in ciascun termine. Le stesse quantità p , q possono anche essere frazioni, o miste di frazioni, ed interi razionali, o irrazionali, comunque sianfi; e saranno sempre nelle equazioni separabili le indeterminate, purchè le p , e q sieno in tal modo date per x , ed y , che fatte le sostituzioni assegnate, nascano in luogo loro quantità tali, che sieno il prodotto di due, una delle quali contenga la z , e non la t ; l'altra la t , e non la z .

Fatte le dette sostituzioni, avremo la formola

$$-\frac{1}{c} t^{\frac{1}{c}} \frac{-fc - fn - 1c}{cf} dt = \frac{r}{n+1} \times z^{\frac{r-fn-f}{fn+f}} dz \times \frac{q}{p}.$$

$$a \pm \frac{acz}{f^{\frac{r}{n+1}}}$$

ESEM.

ESEMPIO I.

Sia $\overline{xxdx + ay^2 dy} \times y = - \overline{3xdy + ydx} \times ax$. E sia, come sopra, $s = 1$, $r = 2$, farà $f = -3$, $c = 1$, $n = 2$, $q = ax$, $p = y$, e fatte le sostituzioni nell'ultima formola ritrovata di sopra, avremo

$$-t^{-\frac{8}{3}} dt = \frac{\frac{2}{3} z^{-\frac{11}{9}} dz \times \frac{ax}{y}}{a - \frac{az^{-\frac{2}{3}}}{3}}. \text{ Ma } y = t^{-\frac{1}{3}} z^{-\frac{2}{9}},$$

$$x = t^{-1} \times \frac{1}{a - \frac{az^{-\frac{2}{3}}}{3}}, \text{ dunque farà } -\frac{dt}{u}$$

$$\frac{2adz}{3}, \text{ il che ec.}$$

$$3z \times \frac{1}{a - \frac{az^{-\frac{2}{3}}}{3}}.$$

ESEMPIO II.

$$\text{Sia } \overline{x^{\frac{1}{2}} dx + ay^{-2} dy} \times \overline{ay^{\frac{1}{2}} x + yx^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\overline{2xdy + 3ydx} \times y^{\frac{1}{3}} x - yxx; \text{ e sia } s = 1, r = 1, \text{ farà } c = 3,$$

$c = 3$, $f = 2$, $n = \frac{1}{2}$, $p = ay^{\frac{1}{2}}x + yx^{\frac{1}{2}}$, $q = y^{\frac{1}{2}}x - yxx$, e fatte le sostituzioni, farà

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{3}dt &= \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{2}}dz \times a + \frac{3az}{2}^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}z^{-\frac{1}{2}}dz \times a + \frac{3az}{2}^{-\frac{1}{2}}, \\
 &\frac{19}{12} \frac{az^{\frac{1}{6}} \times a + \frac{3az}{2}^{-\frac{1}{2}} + z^{\frac{2}{3}} \times a + \frac{3az}{2}^{-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{13}{6}}}
 \end{aligned}$$

in cui sono separate le variabili, il che ec.

32. Nelle equazioni 1. $pxy^{n-1}dy = py^ndx + qdx$

2. $pxy^{n-1}dy = -py^ndx + qdx$

3. $apxy^{n-1}dy = bpy^ndx + qdx$

4. $apxy^{n-1}dy = -bpy^ndx + qdx$

essendo le p , e q date in qualunque maniera per x , si separano le indeterminate, ponendo rispetto alla prima. $y = xz$; rispetto alla seconda $y = \frac{z}{x}$; rispetto alla terza

$y = x^{\frac{b}{a}}z$; rispetto alla quarta $y = x^{-\frac{b}{a}}z$.

E S E M P I O.

Sia l'equazione $2bbxydy - 2x^2yydy = bx^2dx - 3bby^2dx + 3xxy^2dx$, che scrivo così: $bb - xx \times 2xydy = bx^2dx + bb - xx \times -3y^2dx$. Riferita questa all'ultima delle

delle quattro canoniche, farà $p = bb - xx$, $a = 2$, $n = 3$,
 $b = 3$, $q = bx^4$. Adunque si dovrà porre $y = \frac{z}{x^{\frac{1}{2}}}$, $dy =$

$$\frac{\frac{1}{2}dz - \frac{1}{2}zx^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{2}}}, yy = \frac{zz}{x^1}, y' = \frac{z'}{x^{\frac{2}{2}}}, \text{ e fatte le sottri-}$$

$$\text{tuzioni, avremo } 2bbx - 2x^1 \times \frac{\frac{1}{2}zzdz - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}z^1dx}{x^4} =$$

$$bx^4dx + \frac{3bb - 3xx}{x^2} \times -\frac{z^1dx}{x^2}, \text{ cioè}$$

$$\frac{2bb - 2xx}{x^2} \times \frac{zzdz - \frac{1}{2}z^1dx}{x^4} = \frac{bx^{\frac{17}{2}}dx + 3bb - 3xx}{x^2} \times$$

$$-z^1dx, \text{ e facendo le attuali moltipliche, farà}$$

$$2bbxzzdz - 2x^1zzdz = bx^{\frac{17}{2}}dx, \text{ cioè}$$

$$zzdz = \frac{bx^{\frac{17}{2}}dx}{2bbx - 2x^1}.$$

33. Sia l'equazione $axy + bydx + cy^n x^{m-1} dx + f x^m y^{n-1} dy = 0$. In questa generalmente si separano le indeterminate, ponendo $x = u^{n-1} z^{n-1}$, ed $y = z^{1-m}$, poichè fatte le dovute operazioni, si arriva all'equazio-

$$\begin{aligned} & \text{ne } 1-m \times \frac{adz+fu^{mn-m-n+1}dz+n-1 \times bdz+cu^{mn-m-n+1}dz}{n-1 \times -bzu^{-1}du - czu^{mn-m-n}du}, \text{ cioè } \frac{dz}{z} = \\ & \frac{n-1 \times -bu^{-1}du - cu^{mn-m-n}du}{1-m \times a+fu^{mn-m-n+1} + n-1 \times b+cu^{mn-m-n+1}} \end{aligned}$$

ESEMPIO.

Sia l'equazione $a^1x^1y - b^1ydx = cyyxdx - fxyxydy$.
Sarà dunque $n = 2$, $m = 2$, quindi pongo $x = \frac{uz}{y}$, ed
 $y = \frac{ay}{z}$, cioè $x = \frac{au}{y}$, e però $dx = \frac{aydu - audy}{yy}$, onde
fatte le dovute sostituzioni, avremo

$$\begin{aligned} & \frac{a^1udy}{y} - b^1 \times \frac{aydu - audy}{y} = \frac{caayudu}{y} - \frac{faauudy}{y}, \\ & \text{cioè } a^1udy + ab^1udy + aacyudy + faauudy = ab^1ydu + aacyudu, \\ & \text{e però } \frac{dy}{y} = \frac{ab^1du + aacydu}{a^1u + ab^1u + aacyu + aafuu}. \end{aligned}$$

34. Sia l'equazione $\frac{ydx}{x^{\frac{1}{m}} + ay^n x^r} = dy$; e più

$$\text{generalmente } \frac{x^{m-1}ydx}{bx^{\frac{1}{m}} + ay^n x^r} = dy. \text{ Si separano le indetermi-}$$

r r

nate

nate ponendo $\overline{bx^t + ay^n x^r}^m = zx^{mt}$, quindi

$$y = \frac{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ e però } dy =$$

$$\frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{m} x^{t-r} z^{\frac{1}{m}-1} dz + \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dz + \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dx + \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dx =$$

$$\frac{x^{-1} dx \times \frac{1}{m} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}} z}, \text{ posto nell'equazione}$$

generale proposta il valore di y , ed y^n , quindi divi-

$$\text{dendo per } \frac{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ sarà}$$

$$\frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r} z^{\frac{1}{m}-1} dz + \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dx + \frac{1}{n} \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dx - bx^{t-r-1} dx =}{z^{\frac{1}{m}} x^{t-r} - bx^{t-r}}$$

$$\frac{x^{-1} dx}{z},$$

cioè

cioè $\frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}} dz + t - r \times z^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx + t - r \times - bzx^{-1} dx =$

$nz^{\frac{1}{m}} x^{-1} dx - nbx^{-1} dx$, e però

$$\frac{z^{\frac{1}{m}} dz}{z^{\frac{1}{m}} dz} = \frac{dx}{x}$$

$$mnz^{\frac{1}{m}} + mr - mt \times z^{\frac{1}{m} + 1} + mr - mt \times - bz - mn$$

Se vi fossero termini con segni negativi, si proceda nello stesso modo, e nell'equazione finale non vi sarà altra differenza, che ne' segni stessi.

35. Anche presa l'equazione più universale così

$$\frac{y^m dx}{bx^r + ay^n x^r} = c x^{\frac{ut - mnt - t + r + n - ur}{m}} dy \text{ si separano le}$$

indeterminate colla stessa sostituzione.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $\frac{aaydx}{\sqrt{bbxx - a'y}} = bdy$. Pongo

$$\sqrt{bbxx - a'y} = xz, \text{ e però } y = \frac{bbxx - z^2xx}{a}, \text{ e } dy =$$

$$\frac{2bbxdx - 2zzxdx - 2xxzdz}{a}, \text{ e fatte le sostituzio-}$$

112

ni,

$$\text{ni, } \frac{aazdx}{xz} \times \frac{bbxx - zzzx}{a^1} = \frac{2b^1 xdx - 2bzzxdx - 2bxzzdz}{a^1},$$

cioè $aabbxxdx - aazzxxdx = 2b^1 xxdx - 2bz^1 xdx - 2bxzzdz$, o sia $2bxzzdz = 2b^1 xxdx - 2bz^1 xdx + aazzxxdx - aabbxxdx$, e però

$$\frac{2bzzdz}{2b^1 z - 2bz^1 + aazz - aabb} = \frac{dx}{x}.$$

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{xvdx}{\sqrt{-bbx^4 + a^1 xyy}} = \frac{dy}{b}$. Pongo

$$\sqrt{-bbx^4 + a^1 xyy} = zxx, \text{ e però } y = \sqrt{\frac{zzx^4 + bbx^4}{a^1}}, \text{ e } dy =$$

$\frac{x^1 zdz + \frac{1}{2} zzzxxdx + \frac{1}{2} bbxxdx}{a^1}$. Fatte pertanto le sostitu-

$$a^1 \sqrt{\frac{zzx^4 + bbx^4}{a^1}}$$

zioni, averassi $\frac{xdx}{zxx} \sqrt{\frac{zzx^4 + bbx^4}{a^1}} =$

$$\frac{x^1 zdz + \frac{1}{2} zzzxxdx + \frac{1}{2} bbxxdx}{a^1 b \sqrt{\frac{zzx^4 + bbx^4}{a^1}}},$$

cioè

$$\text{cioè } bzzxxdx + b'xxdz = x'zzdz + \frac{1}{2}z'xxdx + \frac{1}{2}bbzxxdx,$$

$$\text{o sia } bzzxxdx + b'xxdx - \frac{1}{2}z'xxdx - \frac{1}{2}bbzxxdx = x'zzdz,$$

$$\text{e però } \frac{dx}{x} = \frac{zzdz}{bzz - \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}bbz + b'}.$$

36. Con la stessa sostituzione usata di sopra si separano le indeterminate anche nell'equazione.

$$\frac{y^u dy}{bx^t + ay^n x^r} = cx \frac{tu - n - tmn - ru + t - r}{n} dx. \text{ Pongo adun-}$$

$$\text{que } \frac{bx^t + ay^n x^r}{bx^t + ay^n x^r}^m = x^{mt} z, \text{ farà } y =$$

$$\frac{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}}, \text{ e } dy =$$

$$\frac{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} dz + t-r \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dx + r-t \times bx^{t-r-1} dx \times x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}}},$$

e fatte le sostituzioni, averassi l'equazione

$$\frac{x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} dz + t-r \times \frac{1}{m} x^{t-r-1} dx + r-t \times bx^{t-r-1} dx \times x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - bx^{t-r}}{a^{\frac{1}{n}} x^{tm} z} =$$

$$cx \frac{tu - n - tmn - ru + t - r}{n} dx. \text{ Dividendo pertanto il nume-}$$

rato-

ratore, e denominatore del primo membro dell'equa-

zione per x^m , e moltiplicandola tutta per $a^{\frac{u+1}{n}} z$, ed

in luogo di $x^{t-r} z^{\frac{1}{m}} - b x^{t-r} z^{\frac{u+1-n}{n}}$ scrivendo

$x^{\frac{tu-tu+t-ru+nr-r}{mn}} \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{u+1-n}{n}}$, che è lo stesso,

ed unendo le dimensioni della lettera x , troveremo esse-
re l'equazione divisibile per $x^{\frac{ut-n-tmn-ru+t-r}{n}}$, e
divisa sarà

$$\frac{xz^{\frac{1-m}{mn}} dz + \frac{t-r}{n} \times z^{\frac{1}{m}} dx + \frac{r-t}{n} \times b dx \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{u+1-n}{n}}}{mn} =$$

$ca^{\frac{u+1}{n}} z dx$, e finalmente di nuovo dividendo per

$$\frac{z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{u+1-n}{n}}}{mn}, \text{ farà}$$

$$\frac{xz^{\frac{1-m}{mn}} dz}{mn} = \frac{r-t}{n} \times z^{\frac{1}{m}} dx + \frac{t-r}{n} \times b dx + ca^{\frac{u+1}{n}} z dx \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{u+1-n}{n}}$$

$$\text{cioè } dx = \frac{z^{\frac{1-m}{mn}} dz}{mnca^{\frac{u+1}{n}} z \times z^{\frac{1}{m}} - b^{\frac{u+1-n}{n}} + mr - mt \times z^{\frac{1}{m}} + mt - mr \times b.}$$

ESEM-

E S E M P I O .

Sia l'equazione $\frac{y' dy}{\sqrt{bbxx - aaxy - abxy}} = \frac{xx dx}{c}$. Pon-

go $\sqrt{bbxx - aaxy - abxy} = xz$, e però $y = \frac{bbxx - z^2xx}{aax + abx} =$

$\frac{bbx - z^2x}{aa + ab}$, e $dy = \frac{bbdx - z^2dx - 2xzdz}{aa + ab}$. Fatte dun-

que le sostituzioni, sarà $\frac{bbx - z^2x}{aa + ab}^3 \times \frac{bbdx - z^2dx - 2xzdz}{aa + ab} \times xz =$

$\frac{xx dx}{c}$, ed in luogo di $\frac{bbx - z^2x}{aa + ab}^3$ scrivendo $x^3 \times \frac{bb - z^2}{aa + ab}^3$,

e moltiplicando tutta l'equazione per $\frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times xz$, avremo

$$x^3 \times \frac{bb - z^2}{aa + ab}^3 \times \frac{bbdx - z^2dx - 2xzdz}{aa + ab} = \frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{xx^3 dx}{c},$$

e dividendo per $x^3 \times \frac{bb - z^2}{aa + ab}^3$, sarà $\frac{bbdx - z^2dx - 2xzdz}{aa + ab} =$

$$\frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{bb - z^2}{aa + ab}^{-3} \times \frac{z dx}{c}, \text{ cioè}$$

$$bbdx - z^2dx + \frac{aa + ab}{aa + ab}^4 \times \frac{bb - z^2}{aa + ab}^{-3} \times -\frac{z dx}{c} = 2xzdz,$$

c

e però $\frac{dx}{x} = \frac{2zdz}{bb - zz - \frac{z}{c} \times \overline{bb - zz}^{-1} \times \overline{aa + ab}^4}$.

37. Servirà la medesima sostituzione similmente,

per l'equazione più generale $\frac{\overline{bx^t + fy^n x^r}^i \times y^n dy}{\overline{bx^t + ay^n x^r}^m} =$

$\frac{cx^{nt-n-tmn-rn+t-r+ni}}{n} dx$. Anzi servirà pure anco
per l'equazione $\frac{y^{n-1} dy}{\overline{bx^t + cx^r + ay^n x^r}^m} = fx^{t-r-1+st-mt} dx$,

ponendo $\overline{bx^t + cx^r + ay^n x^r}^m = x^{mt} z$; la quale, se sia $m = 1$, farà un caso particolare del num. 27., e se sia $c = 0$, farà un caso particolare del num. 36. Di più si potrà costruire anche l'equazione

$$\frac{\overline{gx^t + bx^r + ky^n x^r}^e \times y^{n-1} dy}{\overline{ax^t + bx^r + cy^n x^r}^m} = fx^{t-r-1+st-mt} dx,$$

quando però sia $cb = bk$, usando della stessa sostituzione

$$\overline{ax^t + bx^r + cy^n x^r}^m = x^{mt} z.$$

Che se faranno in oltre $b = 0$, $b = 0$, l'equazione farà un caso particolare della prima di questo numero.

38. Si costruiranno le equazioni

$$\frac{ady}{b + cy^n + fx^n} = gy^{1-n} dx,$$

$$\frac{ay^{n-1} dy}{b + cy^n + fx^m} = gy^{m-1} dx,$$

ponendo per la prima $\overline{cy^n + fx^n} = z$, e per la seconda $\overline{cy^n + fx^m} = z$. E quanto alla prima, farà dunque

$$y = z^{\frac{1}{n}} - fx^{\frac{1}{n}}, \text{ e } dy = \frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} - f dx,$$

e però fatte le sostituzioni, avremo $az^{\frac{1-n}{n}} dz = nubcg dx + nucgz dx + auf dx$, cioè

$$\frac{az^{\frac{1-n}{n}} dz}{nubcg + nucgz + auf} = dx. \text{ Rispetto alla seconda avremo}$$

$$y = z^{\frac{1}{n}} - fx^{\frac{1}{m}}, \text{ e però } dy = \frac{1}{n} \times \frac{z^{\frac{1}{n}-1} dz}{c^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{m} \times \frac{z^{\frac{1}{m}-1} dz}{c^{\frac{1}{m}}} - mfx^{m-1} dx, \text{ e fatte}$$

ff

le

le sostituzioni, $x^{m-1}dx = \frac{az^{\frac{1-u}{n}}dz}{bcgnu + cgnuz + mafu}$.

Ma anche se l'equazione più generalmente presa sia $\frac{ay^{n-1}dy}{b+cy^n+p} = gqdx$, essendo in qualunque modo

le p , e q date per x , e le costanti, purchè sia $q = \frac{dp}{dx}$, si separeranno le indeterminate ponendo simil-

mente $\frac{cy^n+p}{b} = z$, Imperciocchè sarà $y = z^{\frac{1}{n}} - p$, e

però $dy = \frac{\frac{1}{n} \times z^{\frac{1}{n}-1} - p}{c^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{z^{\frac{1-u}{n}}} dz - dp$, e fatte le

sostituzioni, sarà l'equazione $az^{\frac{1-u}{n}}dz = nbcgqudx + ncguzqdx + audp$; ma si suppone $dp = qdx$, adunque sarà

$$\frac{az^{\frac{1-u}{n}}dz}{nbcgu + ncguz + au} = qdx.$$

ESEM.

ESEMPIO I.

Sia l'equazione $a'dy = 6b'dx - 3bbdx \sqrt{cy + bx}$,
 cioè $\frac{a'dy}{2b - \sqrt{cy + bx}} = 3bbdx$. Posta $\sqrt{cy + bx} = z$, farà
 $y = \frac{zz - bx}{c}$, $dy = \frac{zdz - bdx}{c}$, e fatte le sostituzioni,
 $\frac{2a'zdz - a'bdx}{2bc - cz} = 3bbdx$, o sia $2a'zdz = 6b'c dx -$
 $3bbcdx + a'bdx$, e però $\frac{2a'zdz}{6b'c - 3bbcz + a'b} = dx$.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $\frac{ayydy}{b + \sqrt[3]{y' + aax - bxx}} = aadx -$
 $2bx dx$. Pongo $y' + aax - bxx^{\frac{1}{3}} = z$, farà $y =$
 $\frac{z^3 - aax + bxx^{\frac{1}{3}}}{3}$, e però $dy =$
 $\frac{1}{3} \times \frac{3zdz - aadx + 2bx dx}{z^3 - aax + bxx^{\frac{1}{3}}}$, quindi fatte le sostituzioni;

f l z

farà

farà l'equazione $\frac{a}{b+z} \times \frac{3zzdz - aadx + 2bx dx}{b+z} = aadx -$

$2bx dx$, cioè $3azzdz = a' dx - 2abx dx + 3aabd x - 6bbx dx + 3aazdx - 6bzx dx$, e dividendo per $a + 3b + 3z$, farà
 $\frac{3azzdz}{a + 3b + 3z} = aadx - 2bx dx$.

39. L'equazione, o formola canonica $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$ non à generalmente separabili le indeterminate, qualunque siasi l'esponente m ; le à però separabili in infiniti casi, cioè infiniti sono i valori dell'esponente m , posti i quali, succede la bramata separazione.

Per determinarli mi servo di un metodo simile a quello del num. 23. Si ponga $y = Ax^p + x^r t$; (la quantità A , e gli esponenti p , r sono costanti arbitrarie da determinarsi nel progresso, e la t è una nuova variabile) sarà adunque $dy = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$, ed $yy = AAx^{2p} + 2Ax^{p+r}t + tt x^{2r}$, quindi sostituiti questi valori nella proposta formola, daranno la seguente $ax^m dx + cAAx^{2p+n} dx + 2cAtx^{p+r+n} dx + ctt x^{2r+n} dx = pAx^{p-1} dx + rtx^{r-1} dx + x^r dt$. Si supponga $cAA = pA$, $2p+n = p-1$, $r = 2cA$, cioè $p = -n-1$, $A = -\frac{n-1}{c}$, $r = -2n-2$, con

che in quest'ultima formola spariranno il secondo, terzo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad effe-

re $ax^m dx + ctt x^{-1n-4} dx = x^{-1n-1} dt$, cioè dividendo per x^{-1n-1} , $ax^{m+1n+1} dx + ctt x^{-n-2} dx = dt$, o sia (D) $ax^K dx + ctt x^X dx = dt$, fatto $K = m + 2n + 2$, $X = -n - 2$.

Ripiglio la proposta equazione $ax^m dx + cyyx^n dx = dy$, la quale ponendo $y = \frac{1}{z}$, si trasformi in quest'altra $azzx^m dx + cx^n dx = -dz$, in cui si ponga, come sopra, $z = Bx^q + x^i u$ (B, q, i sono similmente costanti da determinarsi, ed u una nuova incognita.) farà dunque $dz = q B x^{q-1} dx + i u x^{i-1} dx + x^i du$, $zz = B B x^{2q} + 2 B x^q + i u + u u x^{2i}$, e sostituiti questi valori, avremo $a B B x^{2q+m} dx + 2 a B u x^{q+i+m} dx + a u u x^{2i+m} dx + c x^n dx = -q B x^{q-1} dx - i u x^{i-1} dx - x^i du$. Si supponga $a B B = -B q$, $2q + m = q - 1$, $-i = 2a B$, cioè $q + m = -1$, $B = \frac{m+1}{a}$, $i = -2m - 2$,

con che in quest'ultima formola spariranno il primo, secondo, quinto, e sesto termine, e si ridurrà ad essere $auux^{-1m-4} dx + cx^n dx = -x^{-1m-1} du$, cioè dividendo per x^{-1m-1} , $cx^{2m+n+1} dx + auux^{-m-2} dx = -du$, o sia (G) $cx^s dx + auux^u dx = -du$, fatto $s = 2m + n + 2$, $u = -m - 2$.

Ora nella proposta equazione sono separabili le indeterminate, quando sia $m = n$; adunque anche nelle formole D, G faranno separabili le indeterminate, quando sia $m + 2n + 2 = -n - 2$, $2m + n + 2 = -m - 2$; dal

dal che si ricavano due valori di m , cioè $m = -3n - 4$,
 $m = -\frac{n-4}{3}$, posti i quali, succede la separazione

delle indeterminate. Poichè adunque nella proposta
 equazione si separano le indeterminate quando sia
 $m = -\frac{n-4}{3}$, si separeranno anche nelle formole D ,

G quando sia $K = -\frac{X-4}{3}$, $s = -\frac{x-4}{3}$, dal che si
 ricavano altri due valori di m , cioè $m = -\frac{5n-8}{3}$,
 $m = -\frac{3n-8}{5}$.

Ripetendo lo stesso discorso, si avranno infiniti
 altri valori della m ; come a dire $m = -\frac{7n-12}{5}$,
 $m = -\frac{5n-12}{7}$, $m = -\frac{9n-16}{7}$, $m = -\frac{7n-16}{9}$ ec.,
 vale a dire generalmente $m = \frac{2b \pm 1}{2b \mp 1} \times -n - 4b$, preso per

b un qualunque numero intero positivo principiando
 dall'unità; posti i quali valori nella proposta equazione,
 ci daranno separabili le indeterminate.

Si aggiunga, essere in oltre separabili le indeter-
 minate nella equazione proposta, quando l'esponente,
 m sia tale, che col metodo del num. 19. possa essa ri-
 dursi ad essere il caso del num. 14.

Sa-

Sarebbe questo il luogo di fare uso di due dissertazioni del dottissimo Signor Eulero inserite negli Atti dell' Accademia di S. Pietro-Burgo Tomo 6., ma perchè la sottile maniera, con cui procede l'Autore, mi sembra oltrepassare i limiti, che io mi sono prefissa di una semplice Instituzione, lascerò, che a suo talento la veggano i Lettori nel citato libro.

PROBLEMA I.

40. Ritrovare la curva, la di cui sotttangente sia eguale al quadrato dell'ordinata diviso per una costante.

Poste le assisse $= x$, le ordinate $= y$, la sotttangente è sempre $\frac{ydx}{dy}$, dunque deve essere eguale ad $\frac{yy}{a}$, e però avremo l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{a}$, onde $adx = ydy$, ed integrando $ax = \frac{yy}{2}$, o sia $2ax = yy$, Parabola apolloniana.

Se la sottotangente dovesse essere eguale alla doppia assissa, averebbess l'equazione $\frac{ydx}{dy} = 2x$, e però $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln a = \ln y$ (aggiungo la costante $\frac{1}{2} \ln a$ per adempire la legge degli omogenei),
cioè

cioè $l\sqrt{ax} = ly$, e togliendo i logaritmi, $\sqrt{ax} = y$,
cioè $ax = yy$, parabola pure apolloniana.

Debba essere costante la sottotangente, farà $\frac{ydy}{dx} = a$,
cioè $ydy = adx$, ed integrando $\frac{yy}{2} = ax$, o sia $yy = 2ax$,
parabola pure apolloniana.

Debba essere la sottangente tripla dell'affissa, farà
 $\frac{ydx}{dy} = 3x$, cioè $\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[3]{aax} = ly$,
o sia $aax = y^3$, parabola prima cubica.

Debba essere la sottangente multipla dell'affissa se-
condo un qualunque numero m , farà $\frac{ydx}{dy} = mx$, cioè

$\frac{dx}{mx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l\sqrt[m]{a^{m-1}x} = ly$, o sia
 $a^{m-1}x = y^m$, curva del genere delle parabole.

Debba essere la sottotangente $= \frac{2ax + xx}{a + x}$, farà l'e-
quazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$, cioè $aydx + yxdx = 2axdy +$
 $xxdy$, o sia $\frac{adx + xdx}{2ax + xx} = \frac{dy}{y}$, ed integrando $l y =$
 $\frac{1}{2} l \frac{2ax + xx}{2ax + xx}$, e però $xx + 2ax = yy$, equazione all'iper-
bola.

Deb-

Debba essere la fottangente $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, farà

l'equazione $\frac{ydx}{dy} = \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$, cioè $ayydx + 3yxxdx =$

$2axydy - 3x^3dy$. Secondo ciò, che è stato detto al num. 18. procuro di ridurre quella equazione al caso del num. 14.; pongo adunque $y = \frac{zz}{a}$, $dy = \frac{2zdz}{a}$,

fatte le sostituzioni, farà $z^4dx + 3zzxxdx = 4xz^3dz - 6x^3zdz$, ed eccola ridotta al suddetto caso; quindi si separeranno le indeterminate, se si porrà $z = \frac{xp}{a}$, $dz = \frac{x dp + p dx}{a}$, e fatte le sostituzioni, farà

$$\frac{p^4 x^4 dx}{a^4} + \frac{3 p p x^4 dx}{a a} = \frac{4 x^4 p^3}{a^3} \times \frac{x dp + p dx}{a} -$$

$\frac{6 x^4 p}{a} \times \frac{x dp + p dx}{a}$, cioè $9 a a p dx - 3 p^3 dx = 4 x p p dp - 6 a a x dp$, e però $\frac{dx}{x} = \frac{4 p p dp - 6 a a dp}{9 a a p - 3 p^3}$, ed integrando,

$$l x = \frac{l m}{\sqrt[3]{p^4 - 3 a a p p}}$$

$$a \sqrt[3]{ay}, \text{ farà } x = \frac{m}{\sqrt[3]{a^4 y y - 3 a^4 y x x}}, \text{ cioè finalmente}$$

$$a^4 y y - 3 a^4 y x x = m x.$$

Le

Le due sostituzioni fatte di $y = \frac{zx}{a}$, e di $z = \frac{xp}{a}$,
per separare le indeterminate, ci fanno vedere, che
sul bel principio bastava farne una sola, cioè $y = \frac{xxp}{a^2}$,

Ma affai più speditamente si otterrà l'intento scri-
vendo l'equazione così: $3yxxdx + 3x^2dy = 2axydy -$
 $ayydx$, la quale divisa per xx farà $3ydx + 3xdy =$
 $\frac{2axydy - ayydx}{xx}$, ed integrando, $3xy = \frac{ayy}{x}$, cioè $\frac{ay}{x} =$
 xx , parabola apolloniana, quando si ometta la co-
stante m .

Debba esser la sottangente $= \frac{4x^2 - axy}{3xx - ay}$, farà l'e-
quazione $\frac{4x^2 - axy}{3xx - ay} = \frac{ydx}{dy}$, cioè $4x^2dy - axydy =$
 $3xxydx - ayydx$, che scrivo in quest' altra maniera:
 $4x^2dy - 3yxxdx = axydy - ayydx$. Osservo, che il se-
condo membro sarebbe integrabile se fosse diviso per
 xy ; divido adunque tutta l'equazione, onde sia
 $\frac{4x^2dy}{y} - \frac{3yxxdx}{x} = \frac{axydy}{x} - \frac{ayydx}{x}$, pongo l'integrale di esso
secondo membro $\frac{ay}{x} = z$, e fatta svanire dall'equazione

la y , farà esser $4x \times \frac{x dz + z dx - 3z x dx}{xx} = dz$,

cioè

cioè $\frac{4xdz + zdz}{z} = dz$, la quale si potrà costruire col metodo del num. 14., o pure preparata giusta il metodo del num. 24., farà $x \times \frac{4dz + dz}{z} = dz$. Faccio adunque $\frac{4dz}{z} + \frac{dz}{x} = \frac{dp}{p}$, ed integrando $1z^4x = 1a^4p$, o sia $z^4x = a^4p$, e però fatta svanire dall'equazione, finale la x , avremo finalmente $\frac{a^4p}{z^4} \times \frac{dp}{p} = dz$, cioè $a^4dp = z^4dz$, ed integrando, $a^4p = \frac{z^5}{5}$, in cui restituito il valore di p , indi quello di z , farà $xx = \frac{ay}{5}$, parabola apolloniana.

Debba esser la sottangente $= \frac{a+x \sqrt{a+x}}{a+1a+x}$, farà l'equazione $\frac{a+x \sqrt{a+x}}{a+1a+x} = y \frac{dx}{dy}$, cioè $\frac{dy}{y} = \frac{adx + dx \sqrt{a+x}}{a+x \sqrt{a+x}}$. Per passare all'integrazioni, pongo $\frac{a+x \sqrt{a+x}}{a+x \sqrt{a+x}} = z$, e però $dz = dx \sqrt{a+x} + adx$; (supposta la logaritmica della sottangente $= a$) sostituiti i valori nell'equazione, farà $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, ed integrando $y = z$, cioè $y = \frac{a+x \sqrt{a+x}}{a+x \sqrt{a+x}}$, curva trascendente, ma che facilmente si descrive, supposta la logaritmica.

PROBLEMA IL

41. Ritrovare la curva, il di cui spazio sia eguale a due terzi del rettangolo delle coordinate.

La formola dello spazio è ydx , e però averassi $\int ydx = \frac{2}{3}xy$, quindi $ydx = \frac{2}{3}x dy + \frac{2}{3}ydx$, cioè $ydx = 2x dy$, o sia $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$, ed integrando come sopra,

$\sqrt{ax} = ly$, ed $ax = yy$, la stessa parabola.

Debba lo spazio esser eguale alla quarta potestà dell' ordinata divisa per un quadrato costante; farà $\int ydx = \frac{y^4}{aa}$, cioè $ydx = \frac{4y^3 dy}{aa}$, o sia $aadx = 4yydy$, ed integrando, $\frac{3aax}{4} = y^4$, parabola prima cubica.

Debba lo spazio esser eguale alla potestà m dell' ordinata divisa per una costante, farà $\int ydx = \frac{y^m}{a^{m-2}}$, cioè $ydx = \frac{my^{m-1} dy}{a^{m-2}}$, o sia $a^{m-2} dx = my^{m-2} dy$, ed integrando $\frac{a^{m-2}}{m-1} \times a^{m-2} x = my^{m-1}$, curva del genere

nere delle parabole , o dell' iperbole , secondo che sarà $m-1$ positivo , o negativo .

PROBLEMA III.

42. *Date infinite parabole del medesimo genere qualunque ; ritrovare , quale sia quella curva , che tutte le taglia ad angolo retto .*

Sia l'equazione $p^{m-n}x^n = y^m$, la quale (considerando , come arbitraria la p , e suscettibile d' infiniti valori) esprime infinite parabole , e similmente considerando le m , ed n , esprime qualunque genere . E sieno esse in primo luogo tutte al medesimo asse AB , (Fig. 3.) vertice A , diverse solo nel parametro . Una di queste infinite parabole sia AC , in cui $AB=x$, $BC=y$.

Da un qualunque punto C si conduca la tangente CT , e la normale CP ; già si fa , che sarà $BT = \frac{mx}{n}$.

La curva , che si cerca , sia DC ; e poichè questa deve normalmente tagliare la parabola nel punto C , per una porzione infinitesima dovrà confondersi con la normale CP nel punto C ; adunque CT tangente della parabola AC sarà assieme normale alla curva DC nel punto C , ed in conseguenza BT sarà nello stesso tempo e sottotangente della parabola , e sottotonormale della ricercata curva DC . Ciò , che dicesi della parabola AC , conviene a qualunque

que altra del medesimo genere. Il problema adunque consiste a ritrovare, quale sia la curva DC , la di cui sottotangente sia $= \frac{mx}{n}$. L'espressione generale della

sottotangente è $\frac{ydy}{dx}$, che in questo caso deve prenderfi

negativa, perchè nella curva DC crescendo $AB(x)$, cala $BC(y)$, e però sarà l'equazione differenziale $\frac{mx}{n} =$

$-\frac{ydy}{dx}$, e separando le variabili, $\frac{mxdx}{n} = -ydy$, ed

integrando, $\frac{mxx}{2n} = -\frac{yy}{2} + aa$, o sia $\frac{yyy}{m} = \frac{2naa}{m} - xx$,

equazione all'ellissi. E perchè in nessun modo ci entra il parametro p , la soluzione sarà generale per le infinite parabole così descritte.

Se l'esponente n della equazione $p^{m-n}x^n = y^m$ si supporrà negativo, onde l'equazione sia $x^ny^m = p^{m+n}$, in cui ora è positivo, sarà essa all'infinita iperbole del medesimo genere fra gli asintoti, le di cui sottotangenti sono $-\frac{mx}{n}$, e deve pure essere a queste eguale la

sottotangente della curva DC ; adunque sarà $-\frac{mx}{n} =$

$-\frac{ydy}{dx}$, cioè $\frac{mxdx}{n} = ydy$, ed integrando, $\frac{mxx}{2n} = \frac{yy}{2} + aa$,

o sia $xx - \frac{2naa}{m} = \frac{yyy}{m}$, equazione all'iperbola.

Se

Se le infinite parabole AC , QC ec. dell'equazione $p^{m-n}z^n = y^m$ averanno tutte lo stesso parametro, ma ciascuna diverso il vertice sul medesimo asse, vale a dire, se una si muova sempre sull'asse parallela a se medesima; chiamando da un punto fisso A (Fig. 4.) una qualunque $AB = x$, e presa una qual si sia QC , la di cui assisa $QB = z$, ordinata $BC = y$, farà pure $-\frac{ydy}{dx}$ la

sottonormale della ricercata curva DC , e però eguale alla sottotangente BT della parabola QC ; quindi l'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{mz}{n}$; ma per l'equazione della parabola si

$$z = \frac{y^{\frac{m}{n-n}}}{p^{\frac{m-n}{n}}}, \text{ adunque } -\frac{ydy}{dx} = \frac{my^{\frac{m}{n-n}}}{np^{\frac{m-n}{n}}}, \text{ cioè } dx =$$

$$-\frac{n}{m} p^{\frac{m-n}{n}} y^{\frac{1-m}{n}} dy, \text{ ed integrando, } x =$$

$$-\frac{np^{\frac{m-n}{n}} y^{\frac{2n-m}{n}}}{m \times 2n-m}, \text{ equazione della ricercata curva } DC.$$

Le parabole sieno apolloniane; cioè $m = 2$, $n = 1$; l'equazione integrata non servirà in questo caso, perchè fatte le sostituzioni de' valori di m , ed x , avrassi $x = -\frac{p}{0}$; ma presa la differenziale, farà

$$\text{essa } dx = -\frac{1}{2} p \times \frac{dy}{y}, \text{ equazione alla logaritmica. La}$$

curva

curva adunque, che taglia le infinite parabole apollonia-
ne ad angolo retto, farà la logaritmica MCN , la di cui
fottangente è eguale alla metà del parametro delle para-
bole.

Le parabole sieno prime cubiche, cioè $m=3$, $n=1$,
farà $x = -\frac{pyy^{-1}}{-1}$, o sia $xy = \frac{pp}{1}$, e la curva DC farà
l'iperbola fra gli asintoti.

Le parabole sieno le seconde cubiche; cioè $m=3$,
 $n=2$, farà $x = -\frac{4}{3}\sqrt{py}$, o sia $xx = \frac{16}{9}py$, e la curva
 DC la parabola ordinaria. Presi altri valori per le m ,
ed n , altre curve si averanno.

Se le parabole AC , QC ec. oltre l'avere sul me-
desimo asse diverso il vertice, averanno variabile il pa-
rametro, cioè uguale in ciascuna alla rispettiva distanza
del vertice dal punto fisso E , presa una qualunque QC ,
sia $EB = x$, assisa della ricercata curva DC , BC ordi-
nata $= y$, $EQ = p$ = al parametro, farà $QB = x - p$,
e l'equazione delle infinite parabole $p^{m-n}x - p^n = y^m$,
e la fottangente $BT = \frac{m}{n} \times \frac{x-p}{x}$, e però l'equazione
 $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \frac{x-p}{x}$.

Le parabole sieno apolloniae, cioè $m=2$, $n=1$,
farà $p = \frac{x \pm \sqrt{xx - yy}}{2}$, quindi fatte le sostituzioni
nell'

nell'equazione $-\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \sqrt{x - p}$, sarà essa $-\frac{ydy}{dx} =$

$x \mp 2 \sqrt{\frac{xx}{4} - yy}$, che si potrà ridurre col metodo del

numero 14. alla separazione, per indi passare all'integrale, che sarà algebrico.

Se le infinite parabole AC , QC ec. dell'equazione $p^{m-n} z^n = y^m$ averanno lo stesso parametro costante, gli assi paralleli, ed i vertici variabili nella perpendicolare agli assi, vale a dire, se una si muova in maniera, che ciascun punto di essa descriva delle perpendicolari agli assi. Presane una qualunque EC (Fig. 5.), e chiamata $AM = EB = z$, $BC = y$, $MC = x$, e condotta alla parabola EC la tangente CT prodotta in V , farà MV la sottornormale della ricercata curva DC ; ma poichè $BT = \frac{mz}{n}$, farà $MV = \frac{mzx}{ny}$; quindi averassi l'equazione $\frac{mzx}{ny} =$

$-\frac{x dx}{dz}$, e sostituito in luogo di y il valore $p^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}$

dato dall'equazione $p^{m-n} z^n = y^m$, farà finalmente

$$\frac{mzx}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = -\frac{x dx}{dz}, \text{ cioè } -\frac{mz dz}{np^{\frac{m-n}{m}} z^{\frac{n}{m}}} = dx, \text{ ed in-}$$

regrado, $x = - \frac{\frac{2m-n}{m}}{\frac{11mz}{m} - \frac{2m-n}{p \frac{m}{m}}}$, equazione della
 curva ricercata DC .

Le parabole sieno apolloniane, cioè $m=2$, $n=1$, farà
 $x = - \frac{4z^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}}$, o sia $\frac{9pxx}{10} = z^3$, e però la curva DC la

seconda parabola cubica, il di cui lato retto farà a quello della parabola AC , come il 9. al 16.

Avvertasi, che in questo caso la posizione della curva DC non sarà la segnata nella figura 5., ma averà il vertice in A , tagliando ad angolo retto la parte inferiore delle parabole apolloniane, cioè incontrando il convesso, come nella figura 6.

Fissato altro genere per le parabole AC , farà pure una parabola d'altro genere la curva DC .

P R O B L E M A I V.

43. Sulla retta AD (Fig. 7.) insista la retta AC in angolo semiretto, si ricerca l'equazione della curva AB, la di cui proprietà sia, che l'applicata BD. abbia alla sottotangente DF la ragione d'una costante a alla BC.

Chiamate $AD = x$, $DB = y$, sarà $CB = y - x$, quindi per la condizione del Problema si averà y , $ydx :: a$, $y - x$, e però l'equazione $adx = ydy - xdy$.

Per separare le indeterminate mi servo del metodo del num. 23., pongo pertanto $x = Ay + p + B$, e $dx = A dy + dp$; fatte le sostituzioni, sarà $aA dy + adp = ydy - Aydy - pdy - Bdy$, ma in questa equazione si separano le indeterminate, se spariscono il primo, e secondo termine, dell'omogeneo di comparazione, cioè se sia $A = 1$, e B rimane arbitraria, che porrò per brevità $= 0$; adunque la sostituzione da farsi è $x = y + p$, $dx = dy + dp$, e l'equazione sarà $adp = -ady - pdy$, cioè $\frac{adp}{a+p} = -dy$, curva

trascendente, e che dipende dalla logaritmica.

PROBLEMA V.

44. Ritrovare la curva, la di cui area sia $axy + bx^c y^e$, chiamando al solito le affisse x , le ordinate y .

Deve adunque essere $\int ydx = axy + bx^c y^e$; e però $ydx = axdy + aydx + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy$; o sia, fatto $a - 1 = m$, $mydx + axdy + cby^e x^{c-1} dx + ebx^c y^{e-1} dy = 0$. Per separare le indeterminate in questa equazione si potrebbe servirsi del metodo del num. 33. ponendo $x = u^{e-1} z^{e-1}$, ed $y = z^{1-e}$, onde $dx = \frac{e-1}{e-1} \times z^{e-1} u^{e-2} du + \frac{e-1}{e-1} \times u^{e-1} z^{e-2} dz$, e $dy = 1 - e \times z^{-e} dz$; ma fatte le sostituzioni, ci si presenterebbe un'equazione molto composta, la quale richiederebbe un lunghissimo calcolo.

Per venirne a capo con brevità: ripresa l'equazione $\int ydx = bx^c y^e + axy$, pongo $x^c y^e = q$, onde l'equazione sia $\int ydx = bq + axy$, e però $ydx = bdq + axdy + aydx$. Ciò posto, mi servo del metodo del num. 24., a norma di cui scrivo l'equazione così:

$$axy \times \frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = bdq; \text{ indi pongo}$$

$$\frac{1-a}{a} \times \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}; \text{ e però integrando, } \frac{1-a}{a} \int \frac{x}{y} = \log p,$$

o sia $x^{\frac{1-a}{a}} = p$. Fatte per tanto le dovute so-

stituzioni, averassi l'equazione $\frac{ax^{\frac{1}{a}} dp}{pp} = bdq$.

Ora per esprimere la $x^{\frac{1}{a}}$ per le affunte p, q , si rifletta, che $x^c y^c = q$, cioè $y^c = \frac{q}{x^c}$, cioè $y = \frac{q^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{c}}}$;

ma si à pure $x^{\frac{1-a}{a}} = p$, dunque $x^{\frac{1-a}{a}} = \frac{q^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{c}}}$, o sia

$x^{\frac{c-a-c+ac}{ac}} = q^{\frac{1}{c}} p$, e finalmente $x^{\frac{1}{a}} =$

$q^{\frac{1}{c-a-c+ac}} p^{\frac{c}{c-a-c+ac}}$. Fatta adunque questa sostituzio-

ne in luogo di $x^{\frac{1}{a}}$, avremo l'equazione

$ap^{\frac{c}{c-a-c+ac}} dp = \frac{bdq}{q^{\frac{1}{c-a-c+ac}}}$, cioè $ap^{\frac{cae - 2ac - c}{c-a-c+ac}} dp =$

$bq^{\frac{-1}{c-a-c+ac}} dq$, ed integrando,

$\frac{ae - aae + aac}{ae - ac} \times p^{\frac{ae - ac}{c-a-c+ac}} = \frac{be - bae + bac}{e - ac + ac - 1} \times q^{\frac{e - ae + ac - 1}{c-a-c+ac}} + g$,

equazione della curva, che si cerca.

E'

E' manifesto , che questa curva sarà per lo più algebrica quando le quantità a, c, e saranno razionali , ed all'opposto trascendente quando una di esse sarà irrazionale. Dissi per lo più , perchè anche poste razionali le a, c, e , sarà però trascendente la curva , se sia $e = c$; o pure $a = \frac{1 - e}{c - e}$; o $c = 1$, ed assieme $a = 1$; o $a = 0$,

ed assieme $e = 1$, ed in diversi altri casi , che non serve tutti accennare .



CAPO

C A P O I V.

*Della riduzione delle Equazioni differenziali
del secondo grado.*

45. **Q**Uando le equazioni differenziali del secondo grado sono tali, che possano loro adattarsi le Regole spiegate dell'integrazioni sì ne' casi delle variabili separate, come in quelle, che sono miste, nulla occorre di più, che servirsi delle dette regole, e così per mezzo dell'integrazioni ridurle a' primi differenziali; e però intorno a ciò nient' altro fa d'uopo aggiungere. Che se poi le formole così ridotte al primo grado non averanno bene spesso separabili le indeterminate, nè saranno costruibili in verun modo, la colpa non farà della maniera, con cui si sviluppano le seconde differenze, ma piuttosto di quella, con cui si maneggiano le prime.

Dovrà adunque versare la nostra industria circa il ridurre le equazioni *differenzio-differenziali* ad essere atte per le assegnate regole dell'integrazioni, il che si può tentare in più modi.

46. Una maniera potrà essere di servirsi de' soliti ripieghi dell'Algebra volgare trasponendo i termini, dividendoli, o moltiplicandoli per qualche quantità, ed altri simili. Ma prima d'ogn'altra cosa è necessario ricordarsi

cordarsi, o sapere, se nel passare dalle prime alle seconde differenze siasi presa qualche flussione per costante, e quale sia stata; ed in oltre, che siccome nell'integrazioni dalle prime differenze alle quantità finite si aggiunge sempre la costante, così nulla meno deve si aggiungere nelle integrazioni dalle seconde alle prime differenze. Ciò posto, sia

ESEMPIO I.

Sia proposta l'equazione $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2aydx + adx.y}{du}$, in

cui la $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è l'elemento della curva, e si suppone costante; la scrivo così $\frac{by^m dydu}{c^m} = 2ayddx + adx.y$.

Il primo membro, essendo costante du , è integrabile, quando anche si multiplichi, o si divida per qualunque funzione di y ; ed osservo, che lo farebbe pure il secondo, se si dividesse per $2\sqrt{y}$. Divido adunque tutta l'equazione per $2\sqrt{y}$, e farà $\frac{by^m dydu}{2c^m\sqrt{y}} =$

$$\frac{2aydx + adx.y}{2\sqrt{y}}, \text{ ed integrando farà } \frac{by^{m+\frac{1}{2}} du}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} =$$

$adx\sqrt{y} + adu\sqrt{a}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Nell'integrare ò aggiunta la du appunto, perchè è costante, e l'ò moltiplicata in $a\sqrt{a}$ per gli omogenei.

ESEM.

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $f = \frac{dx^2 - yddy}{y^2 dx^2}$, in cui si è presa

ydx per costante; la moltiplico per $2dy$, e farà $2f dy = \frac{2dx^2 dy - 2ydyddy}{y^2 dx^2}$, cioè $2f dy = \frac{2dy}{y^2} - \frac{2dyddy}{yydx^2}$, ed inte-

grando, per esser costante ydx , farà $\int 2f dy =$

$$- \frac{1}{yy} - \frac{dy^2}{yydx^2} + ny y dx^2.$$

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $f = \frac{du^2 - yddy}{y^2 dx^2}$, in cui dx sia co-

stante, e du l'elemento della curva, cioè $\sqrt{dx^2 + dy^2} = du$.

Poichè dunque è costante dx , farà $dyddy = duddu$, e

però sostituendo il valore di $d.y$ nell'equazione, farà $f =$

$\frac{dydu^2 - yduddu}{y^2 dydx^2}$, e moltiplicando per $2y$, $2fy =$

$\frac{2ydydu^2 - 2yyduddu}{y^2 dydx^2}$, cioè $2f dy = \frac{2ydydu^2}{y^2 dx^2} - \frac{2yyduddu}{y^2 dx^2}$,

x x

ed

ed integrando $2 \int f dy = - \frac{du^2}{yy dx^2} + n dx^2$.

In quest'altra maniera ancora: posto nell'equazione in luogo di du il suo valore, sarà essa $f = \frac{dx^2 + dy^2 - yddy}{y^2 dx^2}$,

e moltiplicando per $2ydy$, $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^2 dx^2}$,

cioè $2fydy = \frac{2ydydx^2 + 2ydy^3 - 2yydyddy}{y^2 dx^2}$, ed integrando,

$$2 \int f dy = - \frac{dx^2 - dy^2}{yy dx^2} \pm n dx^2.$$

ESEMPIO IV.

Sia l'equazione $adx = \frac{xydy + xdy^2}{dx}$, in cui dx sia costante; moltiplicata per dx , e divisa per x sarà $\frac{adx^2}{x} = yddy + dy^2$, ed integrando, giacchè dx è costante, $adx \log x + Adx = ydy$. Che se farassi la costante aggiunta $A = a$, averassi $adx \log x + adx = ydy$, e passando avanti con l'integrazione, $ax \log x = \frac{yy}{2}$.

ESEM-

E S E M P I O V.

Sia l'equazione $f = \frac{dx dy du^2 + y du^2 dx - y dx du du}{y dx dy dt^2}$,

in cui du è l'archetto della curva, dt è data per x , e per y , e nessuna flussione prima è stata presa per costante; la divido per $y^1 dx^1$, e la moltiplico per 2, e farà $\frac{2f}{y^1 dx^1} = \frac{2 dx dy du^2 + 2 y du^2 dx - 2 y dx du du}{y^1 dx^1 dy dt^2}$, o sia

$$\frac{2 f dy dt^2}{yy dx^2} = \frac{2 y dx^2 dy du^2 + 2 y y du^2 dx dx - 2 y y dx^2 du du}{y^1 dx^1}$$

ed integrando, $2 \int \frac{f dy dt^2}{yy dx^2} = - \frac{du^2}{yy dx^2} \pm n$.

Ma si può ben dire, essere cosa impossibile, il fare uso di questo metodo nell'equazioni, le quali sieno alquanto composte, quando a un di presso già non si sapiano le integrazioni, che devono farsi, onde passerò ad altri metodi.

47. Nella soluzione de' Problemi passando dalle prime alle seconde differenze può tornare molto comodo il non assumere, qualora sia libero, flussione alcuna per costante, per potere quindi con la formola sotto l'occhio determinare quella tale costante, per cui l'espressione venga in tale modo ad abbreviarsi, che sia

xx 2

facil-

facilmente integrabile . Gli esempj faranno meglio intendere il metodo .

E S E M P I O I.

Sia l'equazione $f = \frac{dy^3 + dx^2 dy - x dy ddx + x dx ddy}{2x^3 dy^3}$,

la quale siasi avuta senza assumere alcuna flussione costante . Per abbreviare questa formola: considero , quale possa essere quella flussione , che presa per costante mi distrugga nell'omogeneo di comparazione due termini , due soli lasciandone , e trovo che due possono essere , cioè xdy , e $\frac{dx}{x}$.

Sia dunque $xdy = c$, e prese le differenze , $xddy + dx dy = 0$, e però anco moltiplicando per dx , $xdx ddy + dx^2 dy = 0$, con che spariscono nell'omogeneo di comparazione dall'equazione principale il secondo , e quarto termine così , che si avrà $f = \frac{dy^3 - x dy ddx}{2x^3 dy^3}$; ma

essendo $xddy + dx dy = 0$, sarà $dy = -\frac{xdy}{dx}$, quindi

sostituendo , sarà $f = -\frac{xdy^2 ddy}{2x^3 dx dy^3} - \frac{xdy ddx}{2x^3 dy^3}$, cioè

$f = -\frac{xdy^2 ddy}{2x^3 dx dy^3} - \frac{xdx dy ddx}{2xxx dx dy^3}$, o sia $f = -\frac{dy ddy}{2xxx dx dy^3} - \frac{dx ddx}{2xxx dx dy^3}$,

ma

ma $x dy = c$, adunque $f = - \frac{dyddy - dxddx}{2cc}$, e finalmente $fdx = - \frac{dyddy - dxddx}{2cc}$, ed integrando,

$$\int f dx = - \frac{dy^2 - dx^2}{4c} \pm n, \text{ o sia } \int f dx = - \frac{dy^2 - dx^2}{4xxdy^2} \pm n.$$

Quando siasi giunto all'equazione $f = \frac{dy^2 - xdyddx}{2x^2 dy^2}$, si

può più brevemente passare all'integrazione moltiplicandola per dx , e disponendola così: $fdx = \frac{dx}{2x^2} - \frac{xdyddx}{2xxdy^2}$,

mentre essendo $x dy$ costante, farà $\int f dx = - \frac{1}{4xx} -$

$$\frac{dx^2}{4xxdy^2} \pm n, \text{ come sopra.}$$

Facciasi ora costante la quantità $\frac{dx}{x}$. Una tale supposizione dando $\frac{xd dx - dx^2}{xx} = 0$, e però anco —

$xdyddx + dx^2 dy = 0$, toglie il secondo, e terzo termine dall'equazione principale, e la muta in questa $f = \frac{dy^2 + xdxddx}{2x^2 dy^2}$, e moltiplicando per dx , $fdx =$

$$\frac{xdy^2 + xdx^2 ddy}{2x^2 dy^2}, \text{ il di cui integrale, a cagione di } \frac{dx}{x},$$

o

o $\frac{dx^2}{xx}$ costante, si trova essere $\int f dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy} \pm n$,

come sopra.

48. Ma per sapere a un di presso, quale flussione possa prenderfi per costante, si osservi, se nell'equazione proposta vi sieno due, tre, o più termini, i quali moltiplicati, o divisi per una quantità a loro comune, possano ridursi ad essere integrabili; indi fatta l'integrazione, la loro integrale si prenda per costante, e si proceda nel modo spiegato. Se non sempre, qualche volta almeno avremo l'intento.

Ripiglio l'equazione $f =$

$$\frac{dy^2 + dx^2 dy - xdyddx + xdxddy}{2x^2 dy^2}; \text{ osservo, che i due}$$

termini $dx^2 dy + xdxddy$ divisi per dx rimangono $xdy + xddy$, quantità integrabile, e che il suo integrale è $x dy$; ecco adunque, per qual cagione dovevasi prendere questa quantità per costante. Similmente osservo, che i due termini $dx^2 dy - xdyddx$, se si dividono per $-x dy$, ci danno $-\frac{dx^2 + xddx}{xx}$, quantità integrabile, il di cui

integrale è $\frac{dx}{x}$; potevasi adunque prendere per costante anche la flussione $\frac{dx}{x}$.

ESEM.

E S E M P I O .

Venga proposta la formola $xy \times \overline{dxddy} - \overline{dyddx} = ydydx^2 - yydzdy^2 - xdx dy^2$, in cui la variabile z è in qualunque modo data per y .

La dispongo così: $xydxddy + yydzdy^2 = yx dyddx + ydydx^2 - xdx dy^2$, ed osservo, che se si divida per $yydy$ l'omogeneo di comparazione, sarà egli $\overline{yxddx + ydx^2 - xdx dy}$, il di cui integrale $\overline{xdx}$. Pren-

do adunque per costante $\frac{xdx}{y}$, e però $\frac{xdx}{y} = c$, ed

$\overline{xyddx + ydx^2 - xdx dy} = 0$, quindi la proposta equazio-

ne verrà ad essere $xydxddy + yydzdy^2 = 0$, cioè $dz = -\frac{xdx dy}{y dy^2}$, ed integrando, per essere $\frac{xdx}{y}$ costante,

$$z = \frac{xdx}{ydy} \pm n.$$

49. Quando in una equazione del secondo grado manca l'una, o l'altra delle due indeterminate con tutte le sue funziori, e non entrano nella formola se non le sue differenze prime, o seconde in qual si sia modo com-

poste

poste, ed a qualunque dignità elevate, l'integrazione, o riduzione alle prime differenze sarà sempre in nostra mano per mezzo di una sostituzione. Questa sarà di porre la prima differenza, che fluisce, eguale ad una nuova incognita moltiplicata nella flussione assunta costante, o che si assuma ad arbitrio in caso, che nessuna fosse stata fissata costante. Per esempio: in una data equazione sia stata supposta dx variabile, e dy costante; si faccia $dx = pdy$, e prendendo le differenze nell'ipotesi di dy costante, $ddx = dpdy$. Fatta questa sostituzione in luogo di ddx , e maneggiata l'equazione, col sostituire i valori presi dall'equazione $dx = pdy$, si ridurrà sempre alle prime differenze.

O pure se tornasse più comodo, si ponga la prima flussione della variabile, che manca dall'equazione, eguale ad una nuova indeterminata moltiplicata nella prima flussione dell'altra. Fatte le debite sostituzioni, avendo riguardo alla flussione, che sarà stata presa costante, avremo l'equazione proposta ridotta alle prime differenze.

E S E M P I O I.

Sia di nuovo l'equazione dell'esempio primo del num. 46. $\frac{by^m}{c^m} = \frac{ayddx + adxdy}{du dy}$, in cui è supposta costante la du .

Fac-

Faccio pertanto $dx = pdu$, e differenziando, $dx = dpdu$, quindi surrogato questo valore, avremo $\frac{by^m}{c^m} =$

$$\frac{2xydp + apdy}{duy}, \text{ cioè } \frac{by^m}{c^m} = \frac{2xydp + apdy}{dy}, \text{ e però}$$

$$\frac{by^m dy}{c^m} = 2xydp + apdy, \text{ la qual equazione divisa per } 2\sqrt{y}$$

$$\text{è integrabile, e l'integrale si è } \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} = ap\sqrt{y} \pm g;$$

$$\text{ma } p = \frac{dx}{du}, \text{ dunque } \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2c^m} du = adx\sqrt{y} \pm gdu.$$

ESEMPIO II.

Sia l'equazione $fydydx^2 = -du du$. La f è data per y , du è l'elemento della curva, ed ydx è la flussione presa costante. Faccio adunque $du = pydx$, e differenziando, $du = ydpdx$, e però fatte le sostituzioni, sarà $fydydx^2 = -yypdpdx^2$, cioè $f dy = -p dp$; onde integrando, $\int f dy = -pp + 2m$, ma $pp = \frac{du^2}{yydx^2} =$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{yydx^2}; \text{ fatte pertanto le sostituzioni, e la riduzione}$$

$$yy \quad \quad \quad ne,$$

$$\text{ne, averassi } dx = \frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}.$$

Riduco ora la stessa equazione per mezzo dell'altra sostituzione indicata. Pongo adunque $dx = pdu$, e $ddx = dpdu + pddu$, e però $du = \frac{ddx - dpdu}{p}$. Fatte le sostituzioni, sarà l'equazione $fypppdydu = -\frac{duddx + dpdu^2}{p}$, ma è stata assunta costante la flusso-
ne ydx , quindi averemo $ydlx + dydx = 0$, cioè $dlx = -\frac{dx dy}{y}$, o sia $ddx = -\frac{p ludy}{y}$, e surrogato questo valore ancora nell'equazione, sarà $fppyydy = \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p}$. Ciò posto: passo avanti, e faccio $\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$, onde $py = q$, e però $fqqdy = \frac{dq}{q}$, o sia $f dy = \frac{dq}{q^2}$, ed integrando, $\int f dy = -\frac{1}{2qq} + m$; ma $qq = ppyy = \frac{yvd x^2}{du^2} = \frac{yydx^2}{dx^2 + dy^2}$, dunque sarà $2 \int f dy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yydx^2} + 2m$, da cui si ricava, come sopra, $dx = \frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$.

ESEM.

ESEMPIO III.

Ripiglio l'equazione dell'esempio 3. del num. 46.
 $fy^1 dx^2 = dx^2 + dy^2 - yddy$, in cui è costante dx , e
 pongo $dy = p dx$, e però $ddy = dp dx$, fatta la sostitu-
 zione, farà $fy^1 dx^2 = dx^2 + dy^2 - ydp dx$, e fatta spari-
 re la dx col valore $\frac{dy}{p}$, avremo $\frac{fy^1 dy^2}{p} = \frac{dy^2}{p} + \frac{dy^2}{pp} -$

$\frac{y dy dp}{p}$, cioè $fy^1 dy^2 = dy^2 + p p dy^2 - y p dy dp$, e dividendo

per $y^1 dy$, farà $f dy = \frac{dy}{y^1} + \frac{p p dy}{y^1} - \frac{y p dp}{y^1}$, ed integrando,

$\int f dy = -\frac{1}{2yy} - \frac{pp}{2yy} + m$, e fatta la sostituzione in-

luogo di p del valore $\frac{dy}{dx}$, $\int f dy = -\frac{1}{2yy} - \frac{dy^2}{2yy dx^2} + m$,

cioè $2 \int f dy = -\frac{dx^2 - dy^2}{yy dx^2} + 2m$, e però $dx =$

$$\frac{dy}{\sqrt{2myy - 1 - 2yy \int f dy}}$$

50. Che se nella proposta equazione nessuna flus-
 sione sia stata presa per costante, una se ne prenda a
 piacere, e si operi come s'è fatto nel num. 48.

yy 2

ESEM-

ESEMPIO.

Data l'equazione dell'esempio 5. num. 46., in cui nessuna flussione è assunta costante, cioè $fy'dydx' = dx dy du^2 + y du^2 dx - y dx du du$ (posta ydx in luogo di dt), se si prenda costante dx , sparirà il termine $y du^2 dx$, e l'equazione sarà $fy'dydx' = dy du^2 - y du du$, onde per ridurla dovrà porsi $du = p dx$, quindi $du = dp dx$. Surrogati questi valori, avremo $fy'dydx' = p p dy dx' - y p dp dx'$, cioè $fy'dy = p p dy - y p dp$, la quale equazione, per passare alle integrazioni, scrivo così: $fy'dy = p p y \times \frac{dy}{y} - \frac{dp}{p}$, quindi integrando col metodo del num.

24. dell'antecedente capo, $\int f dy = - \frac{p p}{2 y y} + m$; e re-

stituito il valore di p , $\int f dy = - \frac{du^2}{2 y y dx^2} + m$.

Se si prenda costante du , sparirà il termine $y dx du du$, e l'equazione sarà $fy'dydx' = dx dy du^2 + y du^2 dx$, e però dovrà porsi $dx = p du$, $dx = dp du$. Sostituiti questi valori, avremo $fy'dy \times p^2 du^2 = p dy du^2 + y dp du^2$, cioè $fy'dy = \frac{p dy + y dp}{p^2}$, e però integrando, sarà $\int f dy = - \frac{1}{2 p p y y} + m$,

c

e restituito il valore di p , $\int f dy = - \frac{du^2}{2yy dx^2} + m$.

51. Il poterfi assumere una flussione a piacere per costante nelle equazioni, in cui nessuna sia già stata presa, può rendere capaci del metodo del num. 49. alcune equazioni, le quali, per avere ambedue le indeterminate finite, non lo sieno; e ciò assumendo tale flussione per costante, che faccia sparire tutti que' termini, ne' quali si trova l'una delle indeterminate finite, rimanendo quelli soli, che l'altra contengono.

E S E M P I O.

Sia l'equazione $dx' - dx dy^2 = y dx dx + 2x dy dy$, in cui nessuna flussione è presa costante.

Se faremo costante dx , sparirà il primo termine dell'omogeneo di comparazione, e se faremo costante dy , sparirà l'ultimo; e sì nell'uno, che nell'altro caso una sola delle indeterminate rimane. Fisso adunque costante dx ; farà l'equazione $dx' - dx dy^2 = 2x dy dy$. Pongo $dy = \frac{p dx}{a}$, $ddy = \frac{dp dx}{a}$; fatte le sostituzioni, farà

$$dx' - \frac{p p dx^2}{aa} = \frac{2x p dp dx^2}{aa}, \text{ cioè } a a dx - p p dx = 2 x p dp,$$

o sia $\frac{dx}{x} = \frac{2pdp}{aa - pp}$; integrando adunque, farà $lx =$

$-l \frac{1}{aa - pp} + lm$, e però $x = \frac{m}{aa - pp}$, e restituito in

luogo di p il suo valore $\frac{ady}{dx}$, farà $x = \frac{m}{aa - \frac{aady^2}{dx^2}}$,

cioè $x = \frac{mdx^2}{aadx^2 - aady^2}$, o sia $mdx^2 = aadx^2 - aaxy^2$.

52. Ma quando il prendere una flussione a piacere per costante non serve per eliminare una delle due indeterminate finite, o la flussione costante sia già stata fissata, sicchè nell'equazione rimangano ambedue le indeterminate, fin'ora non è stato scoperto alcun metodo generale per procedere avanti.

I metodi spiegati possono avere tal volta il loro uso, siccome pure i soliti artifizj dell'Algebra comune con le moltiplicazioni, divisioni ec., come per esempio nell'equazione $xydy^2 = xdx - dx^2$, la quale divisa per xx farà $ydy^2 = \frac{xdx - dx^2}{xx}$, e però integrabile (supposta dy costante) e l'integrale è $\frac{ydy}{2} = \frac{dx}{x} + mdy$.

Tal'ora una sostituzione può rendere la proposta equazione soggetta al metodo del num. 49. Ed in fatti l'equazione $x^m dx = ydy + dy^2 + ydy^2$, che non è

sog-

foggetta al canone del suddetto numero, lo farà però se si faccia $ydy = dz$, onde sia $x^m ddx = dz + dz^2$.

53. In caso poi, che nelle equazioni sia già stata assunta la flussione costante, può essere di molto uso il mutare l'equazione proposta in un'altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante. Per far ciò: sia l'equazione generale $dy = p dx$ (la p è una quantità data in qualunque modo per x , e per y) e sia dx costante, differenziando sarà $ddy = dp dx$; ma è $p = \frac{dy}{dx}$, dunque

differenziando senza alcuna flussione costante, sarà $dp = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx^2}$, quindi surrogato questo valore in luogo

di dp nell'equazione $ddy = dp dx$, avremo $ddy = \frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$. Se pertanto in una qualunque proposta

equazione, in cui sia costante dx , si ponga in luogo di ddy il valore $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$, sarà essa mutata in un'altra

equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Ma perchè frequentemente altre più composte flussioni si assumono, o sono state assunte per costanti, sarà bene rendere più universale questo metodo.

Sia adunque l'equazione generale $dy = m p dx$; (la p è similmente data in qualunque modo per x , e per y , ed m è una funzione qualunque di x , o di y , o di ambe

be insieme) Sia costante mdx , differenziando farà $ddy = m dx dp$; ma $p = \frac{dy}{mdx}$, e differenziando senza assumere costante, $dp = \frac{mdx ddy - dmdx dy}{mmdx^2}$, quindi fur-

rogato questo valore in luogo di dp nell'equazione $ddy = m dx dp$, avremo $ddy = \frac{mdx ddy - dmdx dy}{mmdx^2} - m dy ddx$.

Se pertanto in una qualunque proposta equazione, in cui sia costante mdx , si ponga in luogo di ddy il valore ritrovato $\frac{mdx ddy - dmdx dy}{mmdx^2} - m dy ddx$, farà essa mutata

in altra equivalente, in cui nessuna flussione è costante.

Rese in questa guisa compite le equazioni, cioè tali, che non abbiano flussione costante, per passare alla riduzione farà in nostro arbitrio di prendere per costante quella, mediante la quale ci verrà fatto di quetere l'intento.

ESEMPIO I.

Ci venga proposta l'equazione da ridurre $dx^2 dy - dy^3 = adx ddy + x dx ddy$, in cui è costante dx . Posto adunque in luogo di ddy il valore $\frac{dx ddy - dy ddx}{dx}$,

(poi

(poichè in questo caso $m = 1$, e $dm = 0$) farà $dx^2 dy - dy^3 = adx dly - aly ddx + xdx ddy - xdy ddx$, in cui nessuna flussione è costante , quindi fatta costante la dy , si trova essere $dx^2 + x ddx + addx = dy^2$, ed integrando , $xdx + adx = ydy$, equazione all'iperbola .

E S E M P I O II.

Sia l'equazione $\frac{xdy^2 - xyddy - ydydx}{ydy} =$

$\frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$, in cui sia stata presa costante la flussione

ydx . Per trasformarla in un'altra , in cui nessuna flussione sia costante , poichè in questo caso $m = y$, il valore della ddy da sostituirsi farà $\frac{ydxddy - dxdy^2 - ydyddx}{ydx} =$

e però l'equazione

$$-\frac{xdy}{y} - dx - \frac{xydxddy + xdx dy^2 + xydyddx}{ydx dy} =$$

$\frac{aadx - xxdx}{aa + xx}$. Per ridurla , fissa per costante la flussione

ne xdy , in conseguenza di che farà $xdly + dxdy = 0$, cioè $-ddy = \frac{dx dy}{x}$, e però fatta la sostituzione ,

$$-\frac{xdy}{y} - dx + dx + \frac{xdy}{y} + \frac{xd dx}{dx} = \frac{aadx - xxdx}{aa + xx} ,$$

zz

cioè

cioè $-\frac{ddx}{dx} = \frac{xxdx - aadx}{aax + x'}$, ed integrando, $-l dx =$

$\int \frac{aa + xx}{x} - l x dy$ (sottraggo $l x dy$, per essere quantità

costante), e togliendo i logaritmi, $\frac{1}{dx} = \frac{aa + xx}{xxdy}$, cioè

$$xxdy = aadx + xxdx.$$

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $\frac{dxddy}{dy} - \frac{dydx}{y} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, e

costante la flussione ydx . Pongo adunque in luogo di ddy il corrispondente valore $\frac{ydxddy - dx dy^2 - ydyddx}{ydx}$,

farà $-\frac{dxddy}{dy} + \frac{dyddx}{dy} = \frac{dx^2 + dy^2}{x}$, in cui nessuna flussio-

ne è costante, quindi presa costante dy , farà $xddx = dx^2 + dy^2$, la quale equazione è il caso del num. 49., e però si fa ridurre,

54. Il metodo spiegato nell'antecedente capo al num. 24. può avere uso anche nelle equazioni differenzio-differenziali, procedendo a un di presso nella maniera ivi adoperata. Eccone la pratica in alcuni esempj.

ESEM-

E S E M P I O I.

Ripiglio la formola dell'esempio primo di questo capo $\frac{by^m}{c^m} = \frac{2ayddx + adxdy}{du}$, in cui $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è assunta costante, farà $\frac{by^m dy du}{ac^m} = 2yddx + dxdy$; la pre-

paro nella seguente maniera: $\frac{ddx + dy}{dx \quad 2y} \times dx = \frac{by^m dy du}{ac^m \times 2y}$,

osservo, che le due quantità sotto la linea sono integrabili per via de' logaritmi; faccio adunque $\frac{ddx + dy}{dx \quad 2y} = \frac{dp}{p}$,

e però $l dx + l \sqrt{y} = l p + l du$ (aggiungo il logaritmo di du , per essere du costante) cioè $dx \sqrt{y} = pdu$. Quindi sostituendo nella proposta equazione in luogo di $\frac{ddx + dy}{dx \quad 2y}$

il valore $\frac{dp}{p}$, ed in luogo di dx il valore $\frac{pdu}{\sqrt{y}}$, farà

$$\frac{dpdu}{\sqrt{y}} = \frac{by^{m-\frac{1}{2}} pdu}{2ac^m}, \text{ o sia } dp = \frac{by^{m-\frac{1}{2}}}{2ac^m} dy, \text{ ed integrando,}$$

$$b + p = \frac{by^{m+\frac{1}{2}}}{m+\frac{1}{2} \times 2ac^m}, \text{ ma } p = \frac{dx \sqrt{y}}{du}; \text{ e però finalmen-}$$

te $bdu + dx \vee y = \frac{by^m + \frac{1}{2} du}{m + \frac{1}{2} \times 2xc^m}$, come nel citato esempio.

E S E M P I O II.

Sia l'equazione $-\frac{ddx \vee xx + yy}{x} = \frac{ydx - xdy}{xx + yy}$, in

cui è costante $ydx - xdy$.

La seconda differenza ddx divisa per la costante $ydx - xdy$ ci dà quantità integrabile, e però scrivo l'equazione così: $-\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{x \times ydx - xdy}{xx + yy \vee xx + yy}$. Ma

osservo, che nel secondo membro la quantità $ydx - xdy$ è sommabile, quando si divide per yy , adunque preparo l'equazione secondo il metodo, e farò

$-\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyy}{xx + yy \vee xx + yy} \times \frac{ydx - xdy}{yy}$. Pongo

$\frac{ydx - xdy}{yy} = dp$, ed integrando, $\frac{x}{y} = p$, quindi fatta la

sostituzione, avremo $-\frac{ddx}{ydx - xdy} = \frac{xyydp}{xx + yy \vee xx + yy}$,

da cui si farà svanire la x , o la y per mezzo dell'equazione

zione $\frac{x}{y} = p$. Facciasi sparire dal secondo membro la

x , collocando il suo valore py , averassi $-\frac{ddx}{ydx - xdy} =$

$\frac{pdp}{aa + pp \sqrt{aa + pp}}$, e passando all'integrazione, farà

$$-\frac{dx}{ydx - xdy} = -\frac{1}{\sqrt{aa + pp}}, \text{ cioè } -\frac{dx}{ydx - xdy} =$$

$$-\frac{y}{\sqrt{aayy + xx}}, \text{ restituendo in luogo di } p \text{ il suo va-}$$

lore $\frac{x}{y}$.

In questa integrazione potevasi aggiungere la costante $ydx - xdy$, ma o si aggiunga, o si ometta, la integrazione dalle prime differenze alle quantità finite, nell'uno, e nell'altro caso ci dà sempre le sezioni coniche.

55. Disi al num. 52., che quando le equazioni differenzio-differenziali contengano ambedue le variabili, non vi è metodo generale per ridurle; uno però se ne può assegnare, il quale sebbene non serve per tutte, è molto universale nel genere suo, ed abbraccia tutte le infinite equazioni, che a tre canoni si rapportano. Mediante questo metodo le date equazioni si trasmutano in altre, nelle quali manca l'una delle due variabili, e che

per

per conseguenza si fanno maneggiare col metodo del num. 49.

Il primo canone comprende quelle, che sono di due soli termini, e vengono espresse dalla formola generale $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, in cui sia presa dx costante. Per ridurre questa equazione, pongo $x = c^{bu}$, ed $y = c^{tu}$; la c è un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, b è un arbitraria da fissarsi nel progresso, ed u, t sono due nuove variabili. Poichè $x = c^{bu}$, ed $y = c^{tu}$, per le regole del calcolo esponenziale sarà $dx = bc^{bu} du$, $ddx = bc^{bu} \times ddu + bdu^2$, $dy = c^u dt + c^u tdu$, $ddy = c^u \times ddt + 2dtdu + tdu^2 + tddu$. Ma posta costante dx , si ha $ddx = 0$, e però $bc^{bu} \times ddu + bdu^2 = 0$, cioè $ddu = -bdu^2$, il che sostituito in luogo di ddu nel valore di ddy , sarà $ddy = c^u \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2$. Sostituiti nella proposta equazione, in luogo di x , ed y , e suoi differenziali, i rispettivi valori, si muterà essa in quest'altra $ac^{bmu} \times b^p \times c^{bpn} du^p =$

$$c^{nu} t^n \times c^u dt + c^u tdu \times c^u \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2,$$

cioè $ac^{\frac{bu \times m + p}{b^p} du^p} = c^{\frac{n + p - 1}{t^n} \times u} \times t^n \times dt + tdu \times ddt + 2dtdu + 1 - b \times tdu^2.$

Ma per liberare questa equazione dalle quantità esponenziali, cioè per togliere da essa la c , converrà che

•sia

sia $n + p - 1 = bm + bp$, con che si determina il valore dell'affunta b , cioè $b = \frac{n + p - 1}{m + p}$, quindi l'equazione

$$\text{farà } a \times \frac{\frac{n + p - 1}{m + p} du^p}{p} =$$

$$t^n \times \frac{p-2}{dt + tdu} \times \frac{ddt + zdtdu + \frac{m - n + 1}{m + p} \times tdu^2}{m + p}, \text{ la}$$

quale, perchè contiene una sola delle variabili finite, cioè la t , viene ad esser soggetta alla regola del sopracitato num. 49.

Poichè adunque si trova il valore di $b = \frac{n + p - 1}{m + p}$,

tosto apparisce, quali sostituzioni dovevano farsi da principio, cioè $x = c^{\frac{n + p - 1}{m + p}}$, ed $y = c^nt$ per ottenere l'intento.

Passando avanti con l'operazione, giusta il metodo del num. 49., pongo $du = zdt$, e però $ddu = zddt + dzdt$, ma la supposizione di dx costante ci ha dato $ddu = -bdu^2$, cioè $ddu = \frac{1 - n - p}{m + p} \times zzdt^2$; adunque

avremo $\frac{1 - n - p}{m + p} \times zzdt^2 = zddt + dzdt$, quindi $ddt =$

$$\frac{1 - n - p}{m + p} \times zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$$

zione,

zione, in luogo di du , e dt , i rispettivi valori, sarà

$$a \times \frac{n+p-1}{m+p} \times z^p dt^p =$$

$$t^n \times \frac{p-2}{m+p} \times \frac{1-n-p}{p+m} \times z dt^2 - \frac{dt dz + 2z dt^2 + m-n+1}{z} \times z z dt^2,$$

o sia dividendo per dt^{p-1} , e moltiplicando per z ,

$$a \times \frac{n+p-1}{m+p} \times z^{p-1} dt =$$

$$t^n \times \frac{p-2}{m+p} \times \frac{1+2m-n+p}{m+p} \times z z dt + \frac{m-n+1}{m+p} \times t z^2 dt - dz,$$

la quale equazione è ridotta alle prime differenze. E' facile a vedere, che per ridurre sul bel principio l'equa-

zione, bastava porre $x = c^{\frac{n+p-1}{m+p}} \times \int z dt$, ed $y = c^{\int z dt} t$.

In questa generale equazione, che è ridotta, 'ò supposta costante la flussione dx ; ciò non ostante però non farà difficoltà alcuna al metodo, che in una qualunque proposta equazione altra flussione diversa da dx sia presa costante, poichè col metodo del num. 53. si potrà mutare la proposta equazione in altra equivalente, in cui nessuna flussione sia costante, per indi poi fissare costante la suddetta dx .

ESEM-

E S E M P I O I.

Sia l'equazione $x dx dy = y dy$, in cui è costante dx ; la scrivo così: $x dx = y dy^{-1} dy$. Paragonata questa con la canonica, farà $a = 1$, $m = 1$, $p = 1$, $n = 1$, quindi surrogati questi valori nell'equazione generale differenziale del primo grado di sopra ritrovata, avremo

$$\frac{1}{2} z z dt = \frac{t}{1 + tz} \times \frac{1}{2} z z dt + \frac{1}{2} t z^1 dt - dz.$$

E S E M P I O II.

Sia $p = 1$, $n = -1$, $m = -1$, cioè l'equazione $ax^{-1} dx = y^{-1} dy^{-1} dy$, o sia $\frac{adx}{x} = \frac{ddy}{y dy}$, in cui è costante la flussione dx . Rispetto a questa farà inutile il metodo, poichè si avrà $p + m = 0$, ed in conseguenza infinito ciascuno de' termini dell'equazione generale differenziale del primo grado, a riserva dell'ultimo.

Ma in questo caso, senz'altro artificio, è facile la riduzione. Scrivo adunque l'equazione così: $x dy = ay dy dx$, ma l'integrale del primo membro è $x dy - y dx$, quello del secondo è $\frac{ay dy dx}{2}$; dunque $x dy - y dx = \frac{ay dy dx}{2} \pm b dx$.

56. Il secondo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali la somma degli esponenti delle indeterminate, e dei loro differenziali sia in ciascun termine la stessa. Supposte x , ed y le due indeterminate, e dx costante, si riducono queste al caso del num. 49. col porre $x = c^n$, ed $y = c^n t$, essendo parimente c un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, e le u , t due nuove indeterminate. Per far vedere il metodo, prendo l'equazione $ax^m y^{-m-1} dx^p dy^{2-p} + bx^n y^{-n-1} dx^q dy^{2-q} = ddy$, la quale, sebbene è di una sola dimensione, e di tre soli termini, ciò nonostante il metodo è generale, e serve, quanti si sieno i termini, e qualunque la dimensione, purchè vi sia la condizione notata.

Pongo adunque $x = c^n$, $y = c^n t$, farà $dx = c^n du$, e perchè dx è costante, avremo $c^n ddu + c^n du^2 = 0$, cioè $ddu = -du^2$; farà pure $dy = c^n dt + c^n tdu$, $ddy = c^n \times \overline{d^2t + 2dudt + tdu^2 + t^2du^2}$, ma $ddu = -du^2$, adunque $ddy = c^n \times \overline{d^2t + 2dudt}$. Sostituiti pertanto questi valori nella proposta equazione, farà essa

$at^{-m-1} du^p \times \overline{d^2t + 2dudt}^{2-p} + bt^{-n-1} du^q \times \overline{d^2t + 2dudt}^{2-q} = \overline{d^2t + 2dudt}$. Perchè adunque manca in questa la indeterminata u , si potrà procedere avanti col metodo del suddetto num. 49.

Faccio

Faccio $du = zdt$, farà $ddu = dzdt + zddt$, ma $ddu = -du^2 = -zzdt^2$, adunque $ddt = -\frac{dzdt}{z} - zdt^2$,

quindi furrogati questi valori, avremo

$$at^{-m-1}z^p dt^p \times \frac{z^{-p}}{dt + zt^2} + bt^{-n-1}z^q dt^q \times \frac{z^{-q}}{dt + zt^2} = -\frac{dzdt}{z} + zdt^2, \text{ o sia } at^{-m-1}z^p dt \times \frac{z^{-p}}{1 + zt} + bt^{-n-1}z^q dt \times \frac{z^{-q}}{1 + zt} = -\frac{dz}{z} + zdt, \text{ equazione dif-}$$

ferenziale del primo grado. Da ciò si vede, che dal principio potevasi ridurre la proposta equazione ponendo

$$x = c^{\int zdt}, \text{ ed } y = c^{\int zdt} z.$$

ESEMPIO.

Sia l'equazione $xdxdy - ydx^2 = yyddy$.

Per rapportarla alla canonica, la scrivo così: $xy^{-2}dxdy - y^{-1}dx^2 = ddy$, farà dunque $a=1, m=1, p=1, n=0, b=-1, q=2$; quindi furrogati questi valori nell'equazione canonica differenziale qui sopra ritrovata, avremo l'equazione ridotta $t^{-2}zdt \times \frac{z^{-1}}{1 + zt} - t^{-1}zzdt = -\frac{dz}{z} + zdt$, o sia $\frac{zdt + zzt^2}{1 + zt} - \frac{zzdt}{1} = -\frac{dz + zzt^2}{z}$, cioè $zzdt - zzt^2 = -ttdz$.

Passando avanti per l'integrazione, farà $\frac{t dt - dt}{z} = \frac{dz}{z^2}$, e però integrando, $t + \frac{1}{t} = -\frac{1}{z} + f$, (la f è la costante aggiunta per l'integrazione) cioè $tz + z = -t + ftz$, ma per le sostituzioni $z = \frac{du}{dt}$, $x = e^u$, $y = e^{ut}$, farà $du = \frac{dx}{x}$, $t = \frac{y}{x}$, $dt = \frac{xdy - ydx}{xx}$, e però $z = \frac{xdx}{x dy - y dx}$, quindi surrogati i valori di t , e di z , avremo $\frac{xdx + ydy}{ydx} = f$.

57. Il terzo canone comprende tutte quelle equazioni, nelle quali l'una delle due variabili, qualunque siasi, assieme con i suoi differenziali forma in ogni termine perpetuamente un medesimo numero di dimensioni. Ma bisogna distinguere due casi; l'uno quando sia costante il differenziale di essa variabile, che forma il medesimo numero di dimensioni; l'altro quando sia costante il differenziale dell'altra.

E quanto al primo caso: sia l'equazione canonica $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+1-n} = dx^m dy$, in cui la somma degli esponenti di x , e di dx in ogni termine è la stessa; P , Q sieno funzioni qualunque della y , e dx sia costante. Per ridurre questa equazione, si fac-

cia $x = c^u$, essendo parimente c un numero, il di cui logaritmo sia l'unità, ed u una nuova variabile. Sarà adunque $dx = c^u du$, e di nuovo differenziando, presa dx costante, $c^u ddu + c^u du^2 = 0$, cioè $ddu = -du^2$. Sostituiti questi valori nell'equazione, avremo $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m+1-n} = du^m ddy$, la quale, perchè non contiene la u , sarà soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = z dy$, sarà $ddu = dz dy + z ddy$, ma $ddu = -du^2$, e $du^2 = z z dy^2$, adunque avremo $z ddy + dz dy = -z z dy^2$, e però $ddy = -\frac{z z dy^2 + dz dy}{z}$.

Sostituiti pertanto nella ritrovata equazione questi valori di du , e ddy , sarà

$P dy^{m+1} + Q z^n dy^{m+1-n} = -z^{m+1} dy^{m+1-n} - z^{m+1} dy^{m+1} dz$,
 e dividendo per dy^{m+1} ,

$P dy + Q z^n dy = -z^{m+1} dy - z^{m+1} dz$, equazione del primo grado. Potevasi adunque sul bel principio porre

$x = c^{\int z dy}$, e così in un sol colpo ridurre l'equazione.

ESEM-

ESEMPIO.

Sia l'equazione $zadx^2dy + axdxddy = zxdxdy^2 + 2xxdyddy$, in cui sia costante dx . Pongo adunque

$$x = c^{\int zdy}, \text{ e però } dx = zdyc^{\int zdy}; ddx =$$

$$c^{\int zdy} \times z zdy^2 + zddy + dydz, \text{ ma } dx \text{ è costante, dunque } z zdy^2 + zddy + dzdy = 0, \text{ e però } ddy = -\frac{z zdy^2 + dzdy}{z}.$$

Sostituiti adunque nell'equazione i valori di x , e di dx , avremo $zazzdy^2 + azdyddy = z zdy^2 + 2dyddy$, e posto il

$$\text{valore di } ddy, \quad zazzdy^2 + azdy \times \frac{-z zdy^2 - dzdy}{z} =$$

$$z zdy^2 + zdy \times \frac{-z zdy^2 - dzdy}{z}, \text{ cioè dividendo per } dy^2,$$

$$az'dy - azdz = -zdz, \text{ o sia } ady = \frac{azdz - zdz}{z}, \text{ ed in-}$$

tegrando, $ay = -\frac{a}{z} + \frac{1}{2z}$, e finalmente restituendo il

$$\text{valore di } z \text{ dato dalla supposizione fatta di } x = c^{\int zdy},$$

cioè $z = \frac{dx}{x}$, avremo l'equazione ridotta

$$aydx^2 = xxdy^2 - axdx dy.$$

58. Rispetto al secondo caso, sia l'equazione canonica $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} ddx$, in cui sia costante dy , e P , Q sieno funzioni qualunque di y .

Pongo, come sopra, $x = c^u$, e però $dx = c^u du$, $ddx = c^u ddu + c^u du^2$. Fatte le sostituzioni nell'equazione canonica, avremo $P dy^{m+1} + Q du^n dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1} ddu$, la quale, per non contenere la u , è soggetta al canone del num. 49.

Pongo adunque $du = zdy$, quindi essendo costante dy , farà $ddu = dzdy$, e però fatte le sostituzioni, avremo $P dy^{m+1} + Q z^n dy^{m+1} = z^{m+1} dy^{m+1} + z^{m-1} dy^m dz$, e dividendo per dy^m , $P dy + Q z^n dy = z^{m+1} dy + z^{m-1} dz$, equazione del primo grado, la quale potevasi in un sol colpo ridurre ponendo, come sopra, $x = c^{\int z dy}$.

ESEMPIO.

Sia l'equazione $zdx dy = addx - yddx$, in cui sia costante dy . Pongo adunque $x = c^{\int z dy}$, quindi $dx = zdy \times c^{\int z dy}$, $ddx = c^{\int z dy} \times zzdy + zddy + dydz$; ma
fi

si suppone costante dy , dunque $ddy = 0$, e però $ddx = \int zdy \times z zdy^2 + dzdy$. Fatte pertanto nella proposta equazione le sostituzioni, avremo $z zdy^2 = a z zdy^2 + a d z dy - z z y dy^2 - y dy dz$, e dividendo per dy , $z zdy = a z zdy + a dz - z z y dy - y dz$; equazione differenziale del primo grado.

Per passare alla integrazione, divido l'equazione per $az - yz$, onde sia $\frac{zdy}{a-y} = zdy + \frac{dz}{z}$, o pure

$$\frac{zdy}{a-y} - \frac{dz}{z} = zdy, \text{ quindi facendo uso del metodo del}$$

num. 24., se così piace, ed integrando, avremo

$$-\frac{1}{a-y} = -\frac{1}{a-y} + m, \text{ e finalmente restituendo}$$

$$\frac{1}{a-y} \times z$$

il valore di $z = \frac{dx}{x dy}$, avremo l'equazione ridotta.

$y dx + x dy = a dx$, trascurando la costante m aggiunta nell'integrazione.

A servito quest' esempio per l'applicazione del metodo, per altro erano superflue tante operazioni, mentre l'equazione $z dx dy = a dx - y dx$ si riduce in un batter d'occhio, trasportando il termine $y dx$, e scrivendo $z dx dy + y dx = a dx$, poichè essendo costan-

te dy , l'integrale del primo membro è $ydx + xdy$, come è chiaro.

59. Oltre a ciò, che è stato detto intorno alle equazioni differenzio-differenziali, nelle quali nessuna prima flussione sia stata presa costante, si può aggiungere un' altro metodo più universale, il quale serve per tutte quelle, che sono comprese sotto la formola canonica $z^{m+1}dx^mddx + \frac{dz}{z}dy^{m+1} = dy^mddy$, in cui la z

è in qualunque modo data per le funzioni di x , e di y .

Per ridurre questa, si determini per costante la flussione $\frac{dx}{q}$, e sia pure la q in qualunque modo data

per le funzioni di x , e di y ; indi si ponga $\frac{dx}{q} = dp$.

Poichè $\frac{dx}{q}$ è costante, farà differenziando, $qddx -$

$dx.dq = 0$, cioè $dx = \frac{dx dq}{q}$, o sia, posto in luogo di

$\frac{dx}{q}$ il valore dp , $dx = dq.dp$. In oltre si ponga

$dy = u.dp$, e prese le seconde differenze nell' ipotesi di dp costante, per esser eguale alla costante $\frac{dx}{q}$, farà

$ddy = du.dp$. Surrogati adunque nell'equazione canonica i valori così determinati in luogo di dx , ddx , dy ,
bbb c

e ddy , avremo l'equazione $z^{m+1}q^m dgd p^{m+1} + u^{m+1} dzdp^{m+1} = u^m du dp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1} ,

farà $z^{m+1}q^m dq + \frac{u^{m+1} dz}{z} = u^m du$, o sia $q^m dq =$

$\frac{zu^m du - u^{m+1} dz}{z^{m+1}}$, ed integrando, $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g =$

$\frac{u^{m+1}}{m+1} \times z^{m+1}$, e però $u = z \times q^{m+1} + m+1 \times g^{m+1}$.

Ma $u = \frac{dy}{dp} = \frac{qdy}{dx}$, adunque $\frac{qdy}{dx} =$

$z \times q^{m+1} + m+1 \times g^{m+1}$, equazione ridotta alle prime differenze.

60. Intorno a quest'ultima equazione è da offer-
varsi, che se la quantità z sarà in tal modo data per x ,
e per y , che possa assegnarsi alla quantità q un valor
tale, dato pure per x , e per y , onde in essa equa-
zione sieno separabili le indeterminate, e però costru-
bile, o algebricamente, o almeno per le quadratu-
re, avremo la curva, da cui dipende l'equazione
differenzio-differenziale. E perchè molti possono essere
i valori da assegnarsi alla q , molte potranno essere le
curve, e ciascun valore della q ci somministrerà una
diversa curva o trascendente, o algebrica, la quale
soddisfa alla questione.

Sia

Sia l'equazione

$$x^2 y d x d d x + 2 a x y d x d y + a a x d y^2 = a a d y d d y .$$

Se si riduce questa

Riferendo questa alla canonica , sarà $m = 1$, $z = \frac{xxy}{aa}$,

$$\text{e però la ridotta } \frac{qdy}{dx} = \frac{xy}{aa} \times \frac{1}{q^2 + 2gg^2} ,$$

Prendo la $q = x$; sarà $\frac{xdy}{dx} = \frac{xy}{aa} \sqrt{xx + 2gg}$, cioè

$$\frac{aady}{y} = xdx \sqrt{xx + 2gg} , \text{ il di cui integrale dipende in}$$

parte dalla quadratura dell'iperbola , e la curva sarà trascendente .

61. Nel fare passaggio dalle prime alle seconde differenze , o non si assume flussione alcuna per costante , o si assume quella , che più si vuole , come è stato detto ; quindi nel ricercare le sommatorie delle formole del secondo grado , poichè si fa qual partito sia stato preso , si fa altresì come governarsi , e ne sono state spiegate le regole .

Ma vi sono infiniti Problemi , che portano alle seconde differenze senza , che si sappia quali costanti involvano le formole indi nascenti . Accade tal volta , che all'espressione analitica arrivare non si possa senza valersi delle costanti , e succede altresì talora , che l'e-

quazione si sviluppi senza ricorrere alle costanti. Questi due casi adunque devono essere esaminati, e devesi procurare qualche criterio per distinguere l'uno dall'altro. E perchè meglio di ogni altra cosa possono servire gli Esempj, prendo il seguente.

Si dimanda una curva tale, che la di lei assissa, elevata a qual si sia dignità sia direttamente, come la seconda differenza dell'ordinata, e reciprocamente come la seconda differenza dell'assissa medesima. Avremo dunque l'analogia $x^m, \frac{dy}{dx} :: a, b$; e per conse-

guenza l'equazione $bx^m dx = addy$. In questa equazione osservo ambe le differenze seconde dell'assissa, e dell'ordinata; ma non so, quale costante sia stata assunta, o se non siasi assunta costante alcuna, e perciò non so la strada, per cui incamminarmi.

Nel caso della premessa equazione dico, che nessuna curva fra le possibili soddisfa al Problema, mentre si faccia passaggio dalle prime alle seconde differenze senza valersi delle costanti. All'opposto, determinate le costanti, si ritroveranno le curve, che adempiono le condizioni del Problema, ma infinite di numero, e differenti di natura, siccome quelle, che variano al mutarsi della costante arbitraria, che si assume.

Per distinguere l'una dall'altra specie di queste equazioni

zioni si può far uso della maniera, o canone, che nascerà da' seguenti esempi, e servirà in tutti que' casi, nei quali il calcolo integrale non ci abbandona.

ESEMPIO I.

Venga proposta l'equazione

$$z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} = dy^m ddy; \text{ dico essere que-}$$

sta una di quelle tali formole, alle quali si può giungere senza pigliare quantità alcuna in figura di costante. La variabile z sia data in qualunque modo per x , ed y .

La dimostrazione si renderà generale, per quanto si può, pigliando come costante la flussione $\frac{dx}{q}$, in cui q è una funzione di x , ed y in qualunque modo combinate. Pongo per tanto $\frac{dx}{q} = dp$, e giacchè il primo mem-

bro di questa equazione è costante, sarà tale anche il secondo dp ; per lo che essendo $dx = qdp$, se si passi alle seconde differenze, sarà $ddx = dqdp$.

Appresso facciasi $dy = udp$, e prese le seconde differenze nell'ipotesi di dp costante, averassi $ddy = du dp$; Quindi surrogati nella equazione principale i valori così

de-

determinati, nascerà l'equazione $z^{m+1} q^m dq dp^{m+1} + \frac{u^{m+1} dz dp^{m+1}}{z} = u^m dudp^{m+1}$, e dividendo per dp^{m+1} ,

nascerà l'equazione libera dall'incognita p , e dalle sue funzioni, cioè $z^{m+1} q^m dq + \frac{u^{m+1} dz}{z} = u^m du$. Sommando

adunque, per le spiegate regole, non ommessa l'addizione della costante g , $\frac{q^{m+1}}{m+1} + g = \frac{u^{m+1}}{m+1 \times z^{m+1}}$, la qua-

le equazione ci dà $u = z \times \frac{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}{z^{m+1}}$. E poichè $dy = u dp = \frac{u dx}{q}$, fatte le opportune sostituzioni, ci si presenta l'equazione al più semplice stato ridotta, cioè

$$dy = \frac{z dx}{q} \times \frac{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}{z^{m+1}}, \text{ il che ec.}$$

Dalla premessa maniera d'operare si deducono i seguenti Corollarj.

I. Se determinata la grandezza z , l'ultima equazione si costruirà, almeno per le quadrature, mentre ciò possa eseguirsi è manifesto, che infinite curve rispondono alla nostra formola, le quali cangiano natura alla mutazione della funzione costante assunta $\frac{dx}{q}$, ed ogni valore della

quan-

quantità q ci somministra una nuova equazione locale o algebrica, o trascendente.

II. Benchè alterato il valore della specie q , nascano curve diverse, certo è però, che se pongasi la costante aggiunta $g=0$, averassi sempre l'equazione $dy=zdz$. In questo caso nulla rileva, quale differenza $\frac{dz}{q}$ si sia presa per costante; conciosiacchè collo sparire della data g , anche la variabile q si dilegua.

III. Ed ecco il segno, onde si conosce, che alla nostra equazione primaria si perviene senza assumere costante flussione alcuna, e che in tale supposizione la sua sommatrice si è $zdx=dy$. Di fatto richiamata sotto gli occhi la nostra espressione $z^{m+1}dx^m ddx + \frac{dz}{z} \times dy^{m+1} - dy^m ddy = 0$, e di bel nuovo differenziando l'integrale $zdx=dy$, senza assumere alcuna costante, onde si abbia, $zddx + dzdx = ddy$, se con il mezzo di queste due ultime equazioni farassi svanire nella formola principale, prima la dy , poscia la dx con le loro funzioni, si scoprirà

$$z^{m+1}dx^m ddx + z^m dzdx^{m+1} - z^{m+1}dx^m ddx - z^m dzdx^{m+1} = 0,$$

$$dy^m ddy - \frac{dz}{z} dy^{m+1} + \frac{dz}{z} dy^{m+1} - dy^m ddy = 0.$$

IV. Maneggiata la formola primaria, come sopra, ed essendosi ritrovata l'equazione ridotta al primo grado, cioè

cioè $dy = \frac{zdx}{q} \times \frac{1}{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}$, si dovrebbe fare transito alle integrazioni, le quali alle volte sono superiori alla nostra industria, secondo i varj valori dell'esponente m della frazione z data per x , e per y , e della quantità $\frac{dx}{q}$, che si piglia per costante. Comunque vada la faccenda, determinati in infiniti casi particolari i predetti valori, e scoperta l'equazione locale della curva in termini finiti, quando si passi alle prime, indi alle seconde differenze, tenuta ferma la costante $\frac{dx}{q}$, ci si presenterà la nostra

formola principale. Ma mutata costante, altre, ed altre formole si troveranno. Non mi fermo di più, perchè ciò è manifesto tornando indietro per le vestigia dell'Analisi.

V. Interviene lo stesso, tolta per costante la prima flussione $\frac{dy}{q}$; conciosiacchè fatta l'operazione a norma del metodo, la quale io tralascio per brevità, arriverassi all'equazione ridotta $dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q} \times \frac{1}{mg + g^{m+1}}$, in cui parimente si noti, che fatta $g = 0$, torna a sostituirsi l'equazione $dx = \frac{dy}{z}$ espressa per le prime differenze.

VI.

VI. Adoperate alcune limitazioni più semplici, cioè $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, se si farà ufo della costante $\frac{dx}{q}$, come nel Corollario IV., la formola

$$dy = \frac{zdx}{q} \times \frac{q^{m+1} + gm + g^{m+1}}{q^{m+1}}$$
 si muta nella se-

guente $dy = xdx \sqrt{xx + 2g}$, la quale ammette integrazione analitica. Fatto poi ufo della espressione contenuta

nel Corollario V. $dx = \frac{dy}{x} - \frac{dy}{q} \times \frac{mg + g^{m+1}}{q^{m+1}}$ nascente dalla costante affunta $\frac{dy}{q}$, tenute ferme le medesime limitazioni di $m = 1$, $z = xx$, e $q = x$, risulta l'espressione $\frac{xxdx}{1 - x \sqrt{2g}} = dy$, che senza l'ajuto de' lo-

garitmi non è sommabile, ed in conseguenza ci dà curve trascendenti.

Egli è adunque manifesto, che alla formola differenziale del secondo ordine $z^{m+1} dx^m ddx + \frac{dz}{z} dy^{m+1} =$

$dy^m ddy$ si poteva arrivare senza prendere alcuna costante, nel qual caso à luogo l'integrale $zdx = dy$; ovvero fissando per costanti, a cagion d'esempio, le flussioni $\frac{dx}{q}$, $\frac{dy}{q}$, ed allora ci si fanno avanti le sommatorie,

c c c

che

che in tali supposizioni si sono ritrovate.

E S E M P I O I I.

Abbiafi l'equazione $x^m ddx = ddy + dy^2$. Dico, che ad essa non si può arrivare, senza prendere una qualche costante, salvo l'unico caso, in cui sia $m = -1$. Per vederlo chiaramente: maneggiò la formola nel seguente modo.

Primieramente prendo per costante dx , e però $ddx = 0$, dunque $-\frac{ddy}{dy} = dy$, ed integrando $\int \frac{dx}{dy} = y$, ovvero $\frac{dx}{dy} = cy$. Pongasi $cy = z$, sarà $ylc = lz$, e però $dy = \frac{dz}{c}$, e sostituendo in luogo di dy questo valore, avrassi $\frac{zdx}{cz} = cy$, ma $cy = z$, dunque $dx = dz$, ed $x = z = cy$; e però $\frac{dx}{x} = dy$, equazione alla logaritmica.

Secondariamente mi faccio ad investigare, cosa succeda nell'ipotesi di un'altra costante, per esempio dy , e però $ddy = 0$. Pongo $dx = sdy + cdy$; la s è una nuova variabile; e la c una quantità data. M'inoltro

alle

alle seconde differenze, farà $d.sx = ds.ly$, e fatta la sostituzione, $x^m dsdy = dy^2$, o sia $x^m ds = dy$; ma $dy = \frac{dx}{s+c}$,

dunque $sds + cds = x^{-m} dx$, e sommando, ommessa l'aggiunta della costante, $\frac{ss+cs}{2} = \frac{x^{-m+1}}{-m+1}$, ovvero

$$s+c = \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}. \text{ Ma } dx = s+c \times dy =$$

$$dy \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}, \text{ dunque } \frac{dx}{\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1} + cc}} = dy.$$

Profeguisco, e cerco, se sia per avventura nascosta sotto l'ultima formola la logaritmica, che essendosi di sopra ritrovata nell'ipotesi della costante dx , può essere, che abbia luogo anche nell'altra supposizione della costante dy . Fatta $c = 0$, è d'uopo, che si verifichi l'uguaglianza

$$\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{-m+1}} = x, \text{ o pure } 2x^{-m+1} =$$

$-m+1 \times xx$. E perchè sia falsa l'uguaglianza, la stessa quantità $-m+1$ deve essere, tanto nel coefficiente, quanto nell'esponente, $= 2$; onde ne segue, che ciò s'ottiene, determinato l'indice $m = -1$.

Nella formola adunque $x^m ddx = ddy + dy^2$, limitando il valore dell'esponente $m = -1$, si perviene all'equazione differenziale del secondo grado senza assumere costante, la di cui sommatoria è l'espressione logaritmica $\frac{dx}{x} = dy$. In ogni altro caso non si può otte-

nere la premessa espressione, se non fissando qualche grandezza infinitesima del primo ordine, siccome costante.

E S E M P I O III.

Rimane, che si proponga per ultimo una equazione differenziale dell'altra classe, a cui non si possa mai giungere senza assumere una costante.

Ripiglio il Problema: Costruire una curva, in cui qualsivoglia dignità dell'assissa sia in ragione diretta della seconda flussione dell'ordinata, ed inversa della seconda flussione dell'assissa.

L'equazione è $bx^m ddx = addy$. Facciasi $dx = qdp$, $dy = udp$; e praticate le operazioni, come nell'Esempio primo, avremo, prese le seconde differenze, $ddx = dpdq$, $ddy = dudp$, e surrogati i valori, $bx^m dq = adu$,

e sommando, $\int bx^m dq = au \pm g$. Ma $dy = udx = \frac{uix}{q}$,

dunque $dy = \frac{dx}{q} \int x^m dq \pm \frac{gdx}{q}$. In questo caso, fatta

$g = 0$, qual si sia valore della spezie q ci dà una curva differente, se pure non si ponesse l'esponente $m = 0$, con che si distrugge l'ipotesi, e si cangia problema. Lo stesso dicasi, fatta costante la frazione $\frac{dy}{q}$, e da ciò

si conchiuda, non esser possibile un'equazione differenziale del primo grado, che senza il beneficio della costante restituisca la nostra formola, quando di bel nuovo venga differenziata; conciosiacchè, se vi fosse, avrebbe a manifestarsi in qualunque assunzione di costante, e pure l'analisi ci dimostra il contrario.

PROBLEMA I.

61. *Dato il raggio osculatore in qual si sia modo per l'ordinata dalla curva, ritrovare la curva.*

Siccome, data la curva, il ritrovare il di lei raggio osculatore si chiama il problema, o metodo diretto de' raggi osculatori, di cui si è trattato al Capo V.

del

del Libro secondo; così, dato il raggio osculatore, ritrovare, quale sia la curva, a cui egli appartiene, si chiama il problema inverso de' raggi osculatori. Sia pertanto il raggio osculatore $= r$ dato in qualsivoglia modo per la ordinata y della curva; presa quella, che si vuole, delle formole de' raggi osculatori per le curve in primo luogo riferite al fuoco, per esempio

$$\frac{y ds^3}{dx ds^2 - y dx dy}, \text{ in cui } dx \text{ è costante, e la } ds \text{ è}$$

l'elemento della curva, avremo l'equazione

$$r = \frac{y ds^3}{dx ds^2 - y dx dy}, \text{ o pure essendo } ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

e $ds dds = dy dy$, perchè dx è costante, $r =$

$$\frac{y dy ds^3}{dx dy ds - y dx dds}$$

Per ridurre questa equazione mi servo del metodo del num. 49., e però pongo $ds = p dx$, onde $dds = p dx$, quindi fatte le sostituzioni nell'equazione, farà $r =$

$$\frac{p p y dy}{p dy - y p}, \text{ o sia } \frac{p dy - y p}{p} = \frac{y dy}{r}, \text{ e però integrando,}$$

giacchè r è data per y , $\frac{y}{p} = \int \frac{y dy}{r} \pm b$, ma

$$p = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}}, \text{ dunque la curva sa-}$$

rà $\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \int \frac{ydy}{r} \pm b$; equazione ridotta alle prime differenze , perchè essendo r data per y , l'integrale $\int \frac{ydy}{r}$ si potrà sempre avere , almeno trascendentemente .

In altro modo .

Scrivo l'equazione $r = \frac{yds^2}{dxds^2 - ydxddy}$ così :

$\frac{yds^2}{r} = dxds^2 - ydxddy$, indi dal punto B , (Fig. 8.)

da cui partono le ordinate BE della ricercata curva AEC , conduco normale ad EB la BF terminata al raggio osculatore EQ , e chiamate $BF = p$, $EF = q$, per le note formole della normale , e sottonormale , farà $q = \frac{yds}{dx}$, $p = \frac{ydy}{dx}$, o sia $dy = \frac{pdx}{y}$, e differenzian-

do nell'ipotesi di dx costante , $ddy = \frac{ydpdx - pxdy}{yy}$, e

fatta la sostituzione nell'equazione principale , farà $\frac{yds^2}{r} = dxds^2 - \frac{dpdx^2 + pdx^2dy}{y}$, ma $ds = \frac{qdx}{y}$, dunque

$\frac{q^2dx}{r} = qqdx - yydp + pydy$, ed essendo $dx = \frac{ydy}{p}$,
 farà

farà $\frac{q' dy}{r} = qqdy + ppdy - ypdp$. Ma, per l'angolo retto

EBF , è $pp = qq - yy$, e $pdp = qdq - ydy$, quindi fatta la sostituzione, si averà $\frac{qqdy}{r} = \frac{zqdy}{r} - \frac{ydy}{r}$, e multipli-

cando per y , indi dividendo per qq , farà $\frac{ydy}{r} =$

$\frac{zqydy - yydq}{qq}$, ed integrando, $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{yy}{q}$, ma

$q = \frac{yds}{dx}$, dunque $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Più semplicemente ancora, sfuggendo le seconde differenze, si potrà fare così:

Prefo l'archetto infinitesimo EC , sia CED la corda prodotta, a cui sia normale BD , se ora si chiami $BD = p$, per le cose dette al numero 115. del Capo V. del secondo Libro, QE , cioè $r = \frac{ydy}{dp}$, e però $\frac{ydy}{r} = dp$,

ed integrando, per essere r data per y , $\int \frac{ydy}{r} \pm b = p$;

ma nello stesso citato luogo $p = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dun-

que

que $\int \frac{ydy}{r} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$

Sia $r = \frac{y}{b} \sqrt{aa + bb}$, adunque farà

$$\int \frac{bdy}{\sqrt{aa + bb}} \pm b = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ ed integrando attual-}$$

mente, ommessa per maggiore semplicità la costante b , $\frac{b}{\sqrt{aa + bb}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e però $bbdx^2 + bbdy^2 =$

$aadx^2 + bbdx^2$, cioè $bdy = adx$, logaritmica spirale dell' Esempio V. num. 128. dello stesso Capo V. Libro II.

In luogo del raggio QE , ci venga dato in qualunque modo per l'ordinata y il co-raggio HE , che chiamo $= z$. Per la similitudine de' triangoli EBD , QEH , farà $EB, BD :: QE, EH$, cioè $y, p :: \frac{ydy}{dp}$,

z , e però $z = \frac{pdy}{dp}$, o sia $\frac{dy}{z} = \frac{dp}{p}$, ed integrando,

$$\int \frac{dy}{z} \pm b = lp. \text{ Sia } z = y, \text{ farà } \int \frac{dy}{y} \pm b = \frac{dp}{p}, \text{ ed in-}$$

tegrando, $ly = lp + \int \frac{m}{b}$, cioè $y = \frac{pm}{b}$; ma $p =$

$$\frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \text{ dunque } b \sqrt{dx^2 + dy^2} = m dx, \text{ e pe-}$$

ddd

rò

rò $b dy = dx \sqrt{mm - bb}$, logaritmica spirale, e la stessa della citata di sopra, quando sia $b = b$, $m = \sqrt{aa + bb}$.

63. Per le curve riferite all' asse la formola del raggio osculatore è $\frac{ds^3}{-dxddy}$, posta dx costante, e

però l'equazione $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$.

Pongo $dy = q dx$, e però $ddy = dq dx$, onde fatte le sostituzioni, $r = \frac{dx^3 + dy^3}{-dx^2 dq}$, e posto il valore $\frac{dy}{q}$ in

luogo di dx , $r = \frac{dy \times \sqrt{1 + qq}}{-dq}$, cioè $\frac{dy}{r} = \frac{-dq}{\sqrt{1 + qq}}$,

ed integrando, $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{1}{\sqrt{1 + qq}}$, ma $q = \frac{dy}{dx}$,

dunque $\int \frac{dy}{r} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

Sia $r = \frac{2a}{4yy + aa}$, adunque farà

$\int \frac{2aady}{4yy + aa} \pm b = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attual-

mente,

mente, ommessa la costante b , $\frac{2y}{\sqrt{4yy+aa}} =$
 $\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, cioè $2ydy = adx$, ed integrando, $yy = ax$,
 parabola dell' Esempio primo num. 122. dello stesso
 Capo V. Libro II.

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio,
 che chiamo $= z$, la di cui formola, supposta dx co-
 stante, è $\frac{dx^2+dy^2}{-dy}$. Dunque $\frac{dx^2+dy^2}{-dy} = z$, e posta
 $dy = qdx$, $ddy = dqdx$, e fatte le sostituzioni de' valori
 di ddy , e di dx , farà $\frac{dy \times \frac{1+qq}{-qdq}}{z} = z$, cioè $\frac{dy}{z}$
 $= \frac{qdq}{1+qq}$, ed integrando, $\int \frac{dy \pm b}{z} = -l\sqrt{1+qq}$,
 quindi se la z , cioè il co-raggio sarà in tal modo da-
 to per y , che $\int \frac{dy}{z}$ sia logaritmico, avremo l'equazio-
 ne differenziale del primo grado espressa nella solita
 ordinaria maniera, in altro caso sarà espressa con quan-
 tità logaritmiche.

Sia $z = \frac{4y^2+axy}{aa}$, avremo l'equazione

$$\int \frac{aady}{4y^2+axy} \pm b = -l\sqrt{1+qq}, \text{ ed integrando attual-}$$

ddd z mente,

mente, ommessa la costante b , $\int \frac{y}{\sqrt{yy + \frac{aa}{4}}} =$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+qq}}, \text{ e però } \frac{yy}{yy + \frac{aa}{4}} = \frac{1}{1+qq}, \text{ e posto il}$$

valore di q , $2ydy = adx$, ed integrando, $yy = ax$, la parabola sopra citata.

64. Il raggio osculatore, o co-raggio sia in secondo luogo dato in qualsivoglia modo per l'assissa x , egli è chiaro, che in questo caso non possono servire le riduzioni avute nel primo, poichè le sommatorie, $\int \frac{dy}{r}$, $\int \frac{dy}{z}$ non si averanno mai, se r , e z sieno date per x .

Presa adunque la formola del raggio osculatore in cui è costante dx , cioè $\frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{1}{2}}$ per le curve riferite all'asse (giacchè in quelle riferite al fuoco il raggio, o co-raggio non può esser dato per l'assissa) farà $r = \frac{dx^2 + dy^2}{-dxddy}^{\frac{1}{2}}$; e però istessamente, come sopra, pon-
go $dy = qdx$, onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le
fosti-

sostituzioni, $r = \frac{dx^2 + qqdx^2}{-dx^2 dq}^{\frac{1}{2}}$, cioè $\frac{dx}{r} = \frac{-dq}{\frac{1}{1+qq}^{\frac{1}{2}}}$,

ed integrando, $\int \frac{dx}{r} \pm b = \frac{-q}{\frac{1}{1+qq}^{\frac{1}{2}}}$, equazione ri-

dotta alle prime differenze, perchè essendo r data per x , la sommatoria $\int \frac{dx}{r}$ si potrà sempre avere, almeno trascendentemente. E posto il valore di q , $\int \frac{dx}{r} \pm b =$

$$\frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Sia $r = 2\sqrt{4aa - 2ax}$; adunque farà $\int \frac{dx}{2\sqrt{4aa - 2ax}} \pm b = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, ed integrando attualmente, ommef-

fa la costante b , $\frac{-\sqrt{4aa - 2ax}}{2a} = \frac{-dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, e

quadrando, e riducendo al comune denominatore, $4aadx^2 - 2axdx - 2axdy^2 = 0$, cioè $dy = dx \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$,

equazione alla cicloide del num. 131. Capo V. Libro II.

In

In luogo del raggio, ci venga dato il co-raggio. Dunque $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, e posta istessamente $dy = qdx$,

onde $ddy = dqdx$, $dy^2 = qqdx^2$, e fatte le sostituzioni in luogo di ddy , e di dy^2 , farà $z = \frac{dx^2 + qqdx^2}{-dqdx}$, cioè

$$\frac{dx}{z} = \frac{-dq}{1+qq}, \text{ ed integrando, } \int \frac{dx}{z} \pm b = \int \frac{-dq}{1+qq};$$

ma l'integrale dell'omogeneo di comparazione è arco di circolo; dunque se il co-raggio farà in tal modo dato, che anche $\int \frac{dx}{z}$ sia arco circolare, e questi archi

si corrispondano come numero a numero, avremo l'equazione ridotta alle prime differenze, ed espressa in quantità ordinarie.

Sia $z = 2\sqrt{2ax - xx}$, adunque farà

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{2ax - xx}} = \int \frac{-dq}{1+qq};$$

ma l'integrale del primo membro è l'arco di circolo, la di cui tangente sia $\sqrt{2ax - xx}$, e del secondo è l'arco di circolo, la di cui tangente sia q , dunque farà $\frac{\sqrt{2ax - xx}}{x} = q = \frac{dy}{dx}$, e però $dy = dx \sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazione alla stessa cicloide.

PRO-

P R O B L E M A II.

65. Dato il raggio osculatore in qualunque modo per la curva riferita all'asse, ritrovare la curva stessa.

La formola del raggio osculatore, posto costante ds (elemento della curva) si è $\frac{dxds}{ddy}$, e però sarà l'equazione $r = \frac{dxds}{ddy}$. Chiamo t la tangente della curva, e p la sottotangente; farà $\frac{yds}{dy} = t$, e differenziando nell'ipotesi di ds costante, $dt = \frac{dy^2 ds - ydsddy}{dy^2}$, cioè $ddy = \frac{dy^2 ds - dy^2 dt}{yds}$, onde fatta la sostituzione, farà $r = \frac{ydxds^2}{dy^2 ds - dy^2 dt}$. Ma poichè si ha $p = \frac{ydx}{dy}$, e $t = \frac{yds}{dy}$, farà $dx = \frac{pdy}{y}$, $ds = \frac{tdy}{y}$; onde sostituiti questi valori nella equazione superiore, si averà $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$;

ma

ma $p = \sqrt{tt - yy}$, dunque $r = \frac{tds\sqrt{tt - yy}}{tdy - ydt}$, cioè

$$\frac{ds}{r} = \frac{tdy - ydt}{t\sqrt{tt - yy}}.$$

Il primo membro di quest'ultima equazione è in nostra mano, almeno trascendentemente, poichè r è una funzione di s ; nel secondo poi facilmente si separano le indeterminate, se si faccia $q = \frac{y}{t}$, con che averassi la semplicissima equazione $\frac{ds}{r} = \frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$.

Se nella formola $r = \frac{ptds}{tdy - ydt}$ in luogo di t si avesse preso il valore $\sqrt{pp + yy}$, averebbessì ritrovato $r = \frac{pp + yy}{pdy - ydp} \times \frac{ds}{p}$, e fatta $\frac{y}{p} = z$, l'equazione pure semplicissima $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1 + zz}$.

Le due quantità differenziali $\frac{dq}{\sqrt{1 - qq}}$, $\frac{dz}{1 + zz}$ sono l'espressione dell'elemento d'arco di circolo; quindi se l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ farà algebrico, o pure dipenderà

da'

da' logaritmi, o da quadrature più alte, la rettificazione delle ricercate curve, ed il valore del raggio osculatore supporrà la quadratura del circolo; ma all'opposto potrà l'uno, e l'altro esser algebrico, se l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ convenga con una formola d'arco circolare.

Ritenuta una delle due equazioni, per esempio, la seconda $\frac{ds}{r} = \frac{dz}{1+zz}$; poichè $ds = \frac{tdy}{y} = \frac{dy}{y} \sqrt{pp+yy}$, e $p = \frac{y}{z}$, farà $ds = \frac{dy}{z} \sqrt{1+zz}$, onde posto questo valore nell'equazione, averassi $dy = \frac{rzdz}{1+zz \sqrt{1+zz}}$.

Essendo $ds = \frac{dy}{z} \sqrt{1+zz}$, farà anche ds^2 , cioè $dx^2 + dy^2 = \frac{dy^2 + zzdy^2}{zz}$, e però $dx = \frac{dy}{z}$.

Il dato raggio osculatore r sia $= 1+ss$; l'equazione $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{r}$ si muterà in questa $\frac{dz}{1+zz} = \frac{ds}{1+ss}$, da cui si ricava $z=s$, e però $r=1+zz$. Pongo questo valore nella equazione $dy = \frac{rzdz}{1+zz \sqrt{1+zz}}$; e farà $dy = \frac{zdz}{\sqrt{1+zz}}$; ed integrando, ommessa la co-

c c c

stante,

stante, $y = \sqrt{1 + zz}$, quindi $z = \sqrt{yy - 1}$. Adunque perchè è ritenuto $dx = \frac{dy}{z}$, farà finalmente $dx =$

$\frac{dy}{\sqrt{yy - 1}}$, equazione della ricercata curva nella suppo-

sizione assunta del raggio osculatore. La costruzione dipende dalla quadratura dell'iperbola.

Prendo la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = \frac{dsddy - dydds}{dxds}$, in cui nessuna flussione prima è costan-

te. Dispongo l'equazione così: $\frac{dy}{dx} \times \frac{ddy - dds}{\frac{dy}{ds}} = \frac{ds}{r}$.

L'integrale di $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds}$ si è $l dy - l ds$, che pongo =

lp ; dunque farà $\frac{ddy}{dy} - \frac{dds}{ds} = \frac{dp}{p}$, e $\frac{dy}{ds} = p$, e però sa-

rà l'equazione $\frac{ds}{r} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dp}{p}$; ma $p = \frac{dy}{ds}$, e $\frac{dy^2}{pp} =$

$ds^2 = dx^2 + dy^2$, dunque $dx = \frac{dy \sqrt{1 - pp}}{p}$; e sosti-

tuendo questo valore, farà $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{\sqrt{1 - pp}}$, equazione

in cui sono separate le variabili, e che per conseguenza può trattarsi con la maniera di sopra usata.

Sia

Sia la formola del raggio osculatore $\frac{ds}{r} = -\frac{dydds}{dsdx}$,

in cui è costante dy . Pongo $ds = qdy$, e però $dds = dqdy$, dunque $\frac{ds}{r} = -\frac{dy^2dq}{dsdx}$; ma $ds^2 = dx^2 + dy^2 =$

$qqdy^2$, onde ricavasi $dx = dy\sqrt{qq-1}$, e $dxds = qqdy^2\sqrt{qq-1}$. Fatta pertanto questa sostituzione, farà $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$.

Sia finalmente la formola del raggio osculatore, $\frac{ds}{r} = -\frac{dxdds}{ds^2}$, in cui è costante dx . Pongo $z = \frac{dx}{dy}$, e però $dz = -\frac{dxddy}{dy^2}$; dunque $\frac{ds}{r} = \frac{dy^2dz}{ds^2}$, ma $dx = zdy$, e $ds^2 = dx^2 + dy^2 = zzdy^2 + dy^2$, quindi $\frac{ds}{r} =$

$$\frac{dz}{1+zz}.$$

In qualunque modo adunque si operi, l'integrale $\int \frac{ds}{r}$ farà sempre riferito alla rettificazione, o quadratura del circolo.

Sia dato in qualunque maniera per la curva il co-raggio, che chiamo $= u$. Prendo una delle tre for-

eee 2

mo-

mole superiori, per esempio quella, in cui è stata presa costante dy , cioè $\frac{ds}{r} = \frac{-dq}{q\sqrt{qq-1}}$, dove è stato

posto $ds = qdy$. Sarà il raggio $r = \frac{uds}{dx}$, e posto questo

valore nella formola, avremo $\frac{ds}{u} = \frac{-dsdq}{qdx\sqrt{qq-1}}$;

ma $ds = qdy$, e $dx = dy\sqrt{qq-1}$, quindi fatte le sostituzioni, sarà $\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{qq-1}$; ma u è data per s , adunque ec.

Qui si offervi, che siccome la sommatoria $\int \frac{ds}{r}$ è eguale all'espressione d'arco circolare, così l'altra sommatoria $\int \frac{ds}{u}$ viene riferita alla quadratura dell'iperbola, o sia a' logaritmi.

66. Con simili, o poco diversi artifizi e maniere si potranno ridurre a' secondi differenziali molte equazioni, o formole espresse con differenziali terzi, quarti ec. Ed in primo luogo il metodo del num. 49. si può estendere (dentro certe limitazioni però) alle equazioni differenziali del terzo ordine, del quarto, del quinto ec., vale a dire si ridurranno sempre al primo ordine le equazioni del terzo, purchè l'una, e l'altra

l'altra delle variabili finite x, y in esse manchi; si ridurranno quelle del quarto, purchè oltre l'una, e l'altra delle due variabili finite x, y , in esse manchi l'una, o l'altra delle prime flussioni dx, dy con le rispettive funzioni; si ridurranno quelle del quinto, purchè in esse manchino ambe le variabili finite, ed ambe le prime loro flussioni; quelle del sesto, purchè oltre tutto ciò, manchi l'una, o l'altra delle flussioni seconde, e così vadasi discorrendo.

Sia l'equazione $dx ddd y + dx^2 ddy = dx^2 + dy^2$, in cui è stata presa costante dx . Faccio al solito $p dx = dy$, e però $dp dx = ddy$, $ddp dx = ddd y$; fatte pertanto le sostituzioni, si averà $dx^2 ddp + dx^2 dp = dx^2 + dy^2$; ma $dy^2 = p^2 dx^2$, dunque sarà $ddp + dx dp = dx^2 + p^2 dx^2$, equazione ridotta al secondo ordine. Pongo in oltre $q dx = dp$, ritenendo per costante dx , e però $dq dx = ddp$, onde sostituendo, sarà $dq dx + p dx = dx^2 + p^2 dx^2$, cioè $dq + dp = dx + p^2 dx$; ma $dx = \frac{dp}{q}$, dunque $dq + dp = \frac{dp}{q} + \frac{p^2 dp}{q}$, equazione ridotta alle prime differenze.

Sia l'equazione differenziale del quarto ordine $d^4 y + dx ddd y - dx^2 ddy = 0$, in cui sia costante dx . Faccio adunque $p dx = dy$, e però $dp dx = ddy$, e $ddp dx = ddd y$, e $ddd p dx = d^4 y$; fatte però le sostituzioni,

ni, si averà $ddp + dxddp - dx^2 dp = 0$, equazione, che è il caso del sopra posto esempio, onde si fa maneggiare, e facilmente si ridurrà alle prime flussioni.

Il metodo del num. 49. ritrovato già tempo fa dal Sig. Conte Jacopo Riccati prima d'ora mi era noto; ma la qui sopra posta estensione, siccome il problema secondo inverso de' raggi osculatori ora solamente gli ô appresi, che mi è venuto alle mani il secondo Tomo de' commentarj dello Instituto di Bologna; e certamente troppo tardi per me, perchè ritrovandomi già al termine dell'impressione di questa mia fatica, non sono più in tempo di prevalermi d'altre dottissime Dissertazioni, e del P. Vincenzo Riccati figlio del suddetto Sig. Conte Jacopo, e del Sig. Gabriello Manfredi ivi inserite. Basterà adunque averle indicate al Lettore, acciò voglia trarne profitto.

67. Veduta la suddetta estensione del metodo del num. 49., passo ad altre equazioni, e ad altri ripieghi; e però sia l'equazione $pd y d d y^2 = p d x^2 d d d y - 2 p d x d d x d d y - d p d x^2 d d y$, in cui la p è in qualunque modo data per x , ed y , ed è stato preso per costante l'elemento ds della curva. Poichè ds è costante, farà $dx d d x = - dy d d y$, onde sostituito questo valore in luogo di $dx d d x$, farà $p d y d d y^2 = p d x^2 d d d y + 2 p d y d d y^2 - d p d x^2 d d y$, cioè cancellato ciò, che si elide, $d p d x^2 d d y = p d y d d y^2 + p d x^2 d d d y$,

o sia $\frac{dp}{p} = \frac{dyddy}{dx^2} + \frac{ddy}{ddy}$, e posto in luogo di $dyddy$

il valore $-dxddx$, sarà $\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{dx} + \frac{ddy}{dy}$, e final-

mente integrando con i logaritmi, $lp = ldy - ldx - lds$, essendo ds costante, e però $p = \frac{dy}{dxds}$, equazio-

ne ridotta alle seconde differenze.

Sia l'equazione $b dz d d d x - 3 b d d z d d x - d b d z d d x = 0$, in cui la b è in qualunque modo data per x , e z . Si finga la seguente equazione $b^m dz^n d d x^r =$ ad una costante (le m , n , r sono potestà incognite da determinarsi nel progresso), dunque differenziando, sarà $r b^m dz^n d d x^{r-1} d d d x + n b^m d d x^r dz^{n-1} d d z + m b^{m-1} d b dz^n d d x^r = 0$, la quale divisa per $b^{m-1} dz^{n-1} d d x^{r-1}$ si riduce ad essere $r b d z d d d x + n b d d x d d z + m d b d z d d x = 0$. Paragonata questa equazione termine per termine con la principale proposta, si à $r = 1$, $n = -3$, $m = -1$, adunque in vece dell'equazione finta $b^m dz^n d d x^r =$ ad una costante, avremo la vera $\frac{ddx}{bdz} =$ ad una costante, che è l'integrale

della proposta.

Per via di logaritmi ancora si può ottenere la stessa integrazione. Ripiglio l'equazione $b dz d d d x - 3 b d d z d d x - d b d z d d x = 0$: divido per $b d z d d x$, fa-

rà

rà $\frac{d^2dx}{dx^2} - 3\frac{ddz}{dz} - \frac{db}{b} = 0$, ed integrando, $ldx -$
 $ldz' - lb = \text{ad un logaritmo costante, dunque } \frac{ddx}{bdz'} =$

ad una costante.

Finirò queste Istituzioni con una avvertenza, ed è, che deve l'accorto Analista procurare con tutta l'industria di scansare nella soluzione de' Problemi le seconde, e molto più le ulteriori flussioni per mezzo di certi ripieghi, che nascono opportunamente sul fatto. Tali artificj si vedono adoperati da illustri Matematici ne' Problemi delle *Curve Elastiche*, *Catenarie*, *Velarie*, in quello degl' *Isoperimetri*, ed in altri, le soluzioni de' quali pubblicate sì negli Atti di Lipsia, come in altre opere, si potranno leggere, a fine di acquistare quella avvedutezza e destrezza, che è necessaria.

F I N E.

640512



TOMO SECONDO.

ERRORI

CORREZIONI

Pag. 432 lin. 11	giungne	giunge
Pag. 435 lin. 22	lineeta	lineetta
Pag. 511 lin. 9	equaaione	equazione
Pag. 515 lin. 14	<i>NOPQR</i>	<i>NOPQMR</i>
Pag. 587 lin. 17	divegenti	divergenti
Pag. 697 lin. 1	queste frazioni	questa frazione
Pag. 727 lin. 13) lin. 20)	<i>DCEB</i>	<i>DECB</i>
Pag. 745 lin. 14	<i>TS</i>	<i>TR</i>
Pag. 790 lin. 17	della	dalla
Pag. 795 lin. ult.	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$	$-\frac{dy\sqrt{aa-yy}}{y}$
Pag. 844 lin. 10	incogoita	incognita
Pag. 901 lin. 10	$-\frac{apdy-fdp}{ep+m}$	$-\frac{apdp-fdp}{ep+m}$
Pag. 924 lin. 5	$\times -\frac{z'dx}{\frac{x^2}{2}}$	$\times -\frac{z'dx}{\frac{2}{x^2}}$
Pag. 929 lin. 1	+ <i>b'xxdz</i>	+ <i>b'xxdx</i>
Pag. 939 lin. 2	dottissimo	dottissimo

Fig. 2.

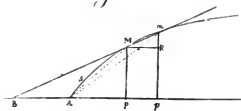


Fig. 4.

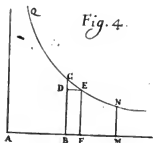


Fig. 6.

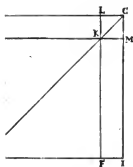


Fig. 13.

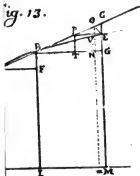


Fig. 14.

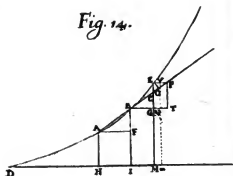


Fig. 15.

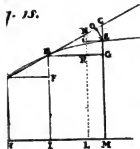


Fig. 16.

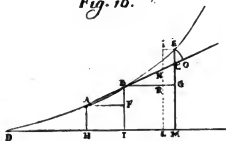


Fig. 17.

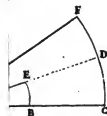


Fig. 18.

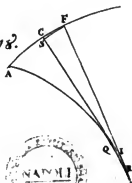


Fig. 19.

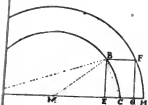


Fig. 20.

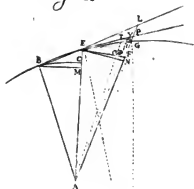


Fig. 22.

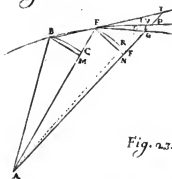


Fig. 23.

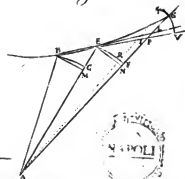
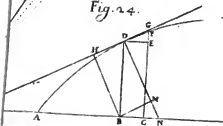


Fig. 24.



VI.



Fig. 37.

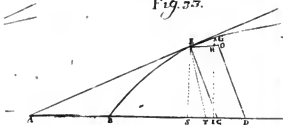


Fig. 37.

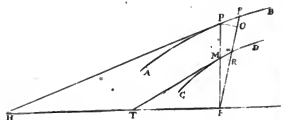


Fig. 38.

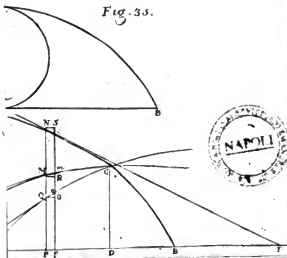


Fig. 39.

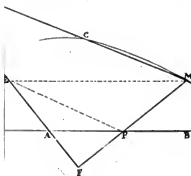


Fig. 38.

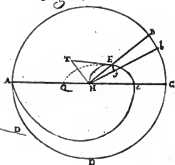


Fig. 4j.

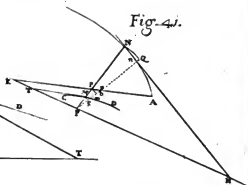


Fig. 42.

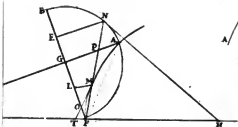


Fig. 43.

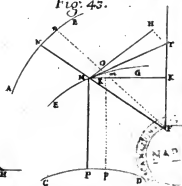


Fig. 47.



Fig. 49.

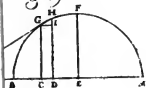


Fig. 51.

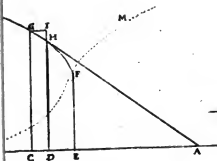


Fig. 48.

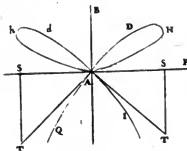


Fig. 50.

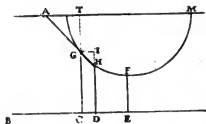
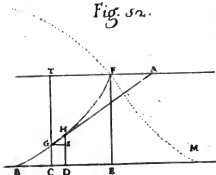


Fig. 52.



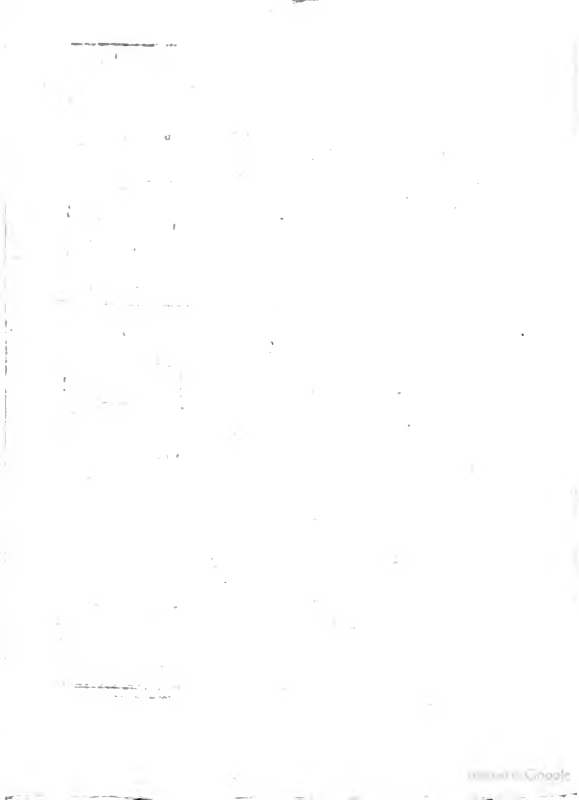


Fig. 54.

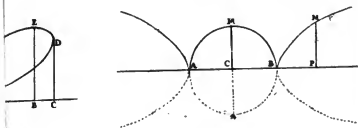


Fig. 56.

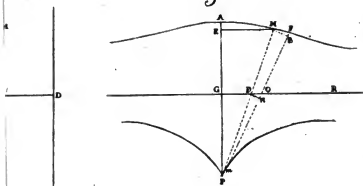
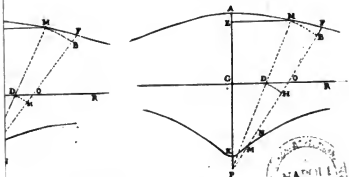


Fig. 58.



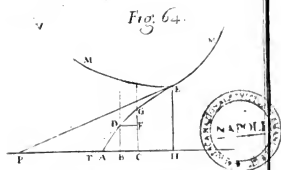
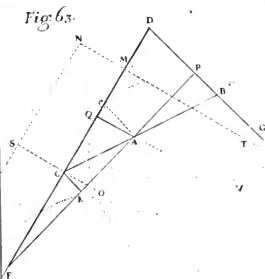
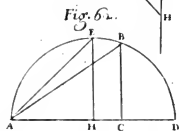
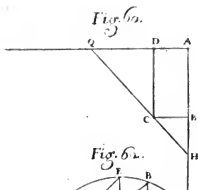
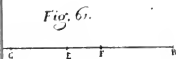
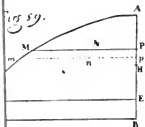


Fig. 65.

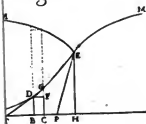


Fig. 66.

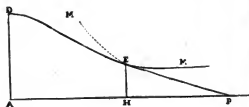


Fig. 67.

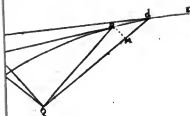


Fig. 68.

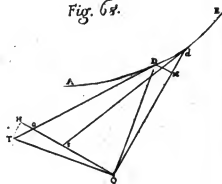


Fig. 69.

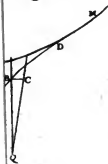


Fig. 70.

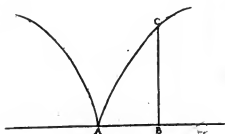


Fig. 72.

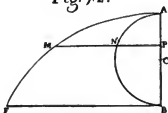


Fig. 74.

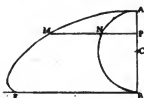


Fig. 73.

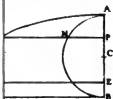


Fig. 76.

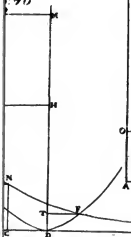


Fig. 75.

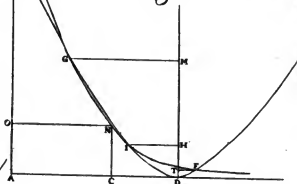




Fig. 79.

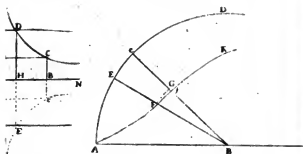
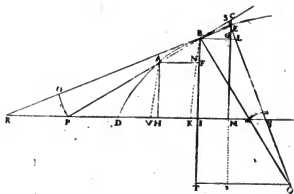


Fig. 80.



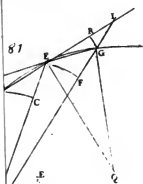


Fig. 82.

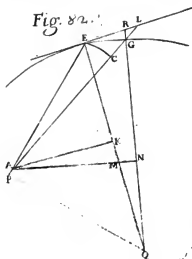
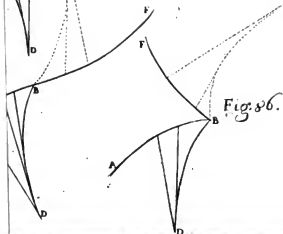
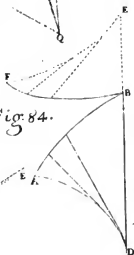


Fig. 84.



41.

Fig. 87

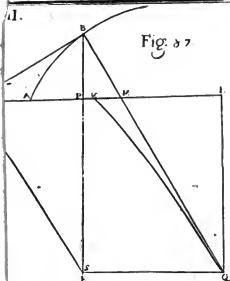


Fig. 89.

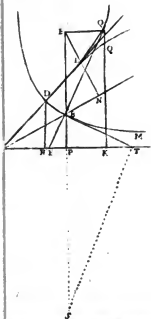


Fig. 88.

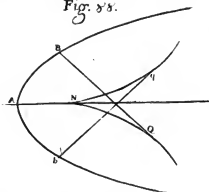


Fig. 90.

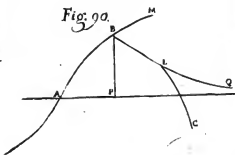
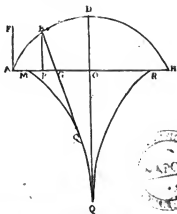


Fig. 91.



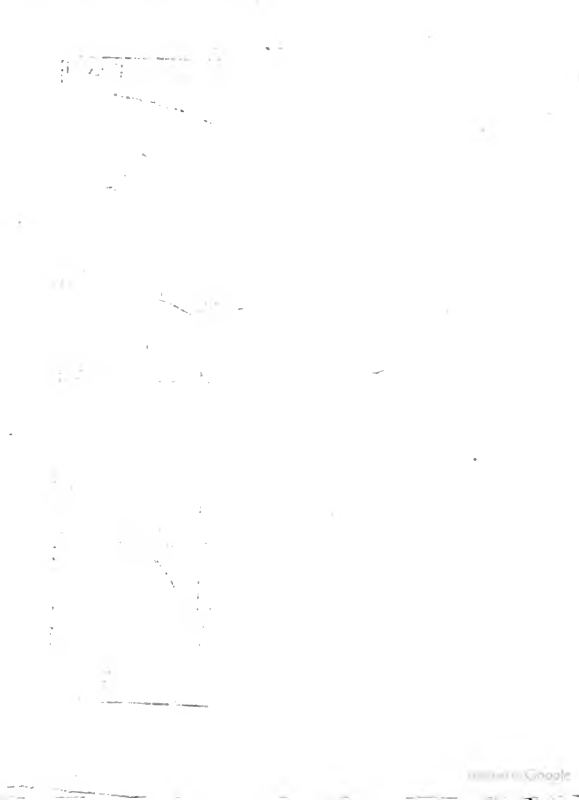


Fig. 92

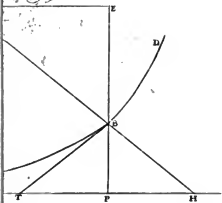


Fig. 93.

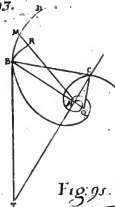


Fig: 94.

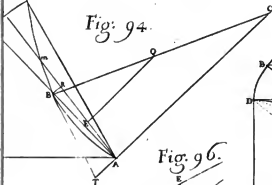


Fig. 96.

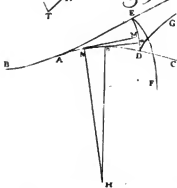
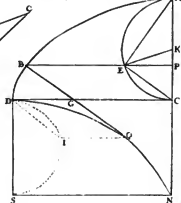


Fig: 95.



T. 1.

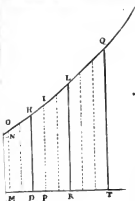


Fig. 1.

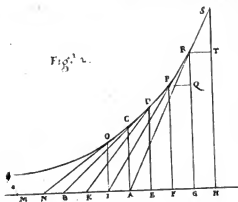


Fig. 4.

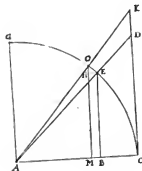


Fig. 6.

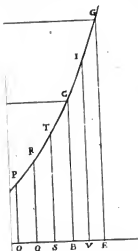
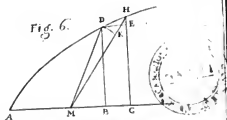
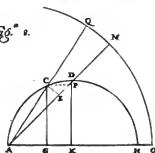
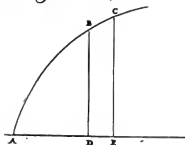
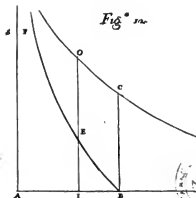


Fig.^a 9.Fig.^a 10.Fig.^a 11.

13.

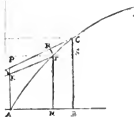
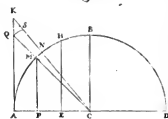
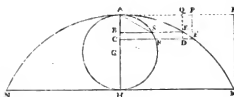
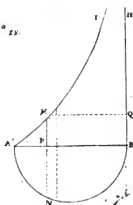
Fig.^a 14.Fig.^a 16.Fig.^a 18.

Fig.^a 22.

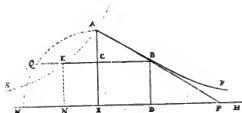
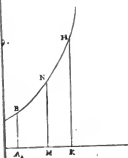


Fig.^a 21.

Fig.^a 20.

Fig.^a 23.

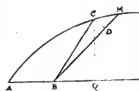
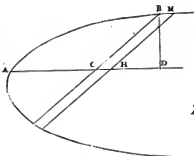
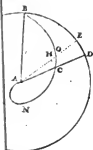
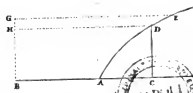
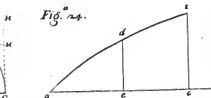


Fig.^a 25.

Fig.^a 24.



T.V.

Fig.^a 27

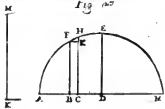


Fig.^a 28

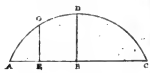


Fig.^a 29

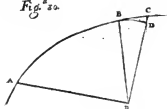


Fig.^a 31

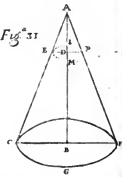


Fig.^a 33

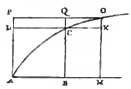


Fig.^a 34.

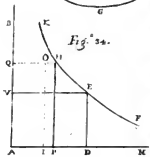


Fig.^a 36.

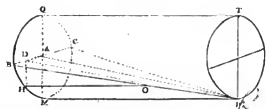


Fig. 37.

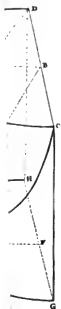


Fig. 38.

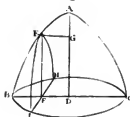


Fig. 40.

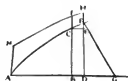


Fig. 42.

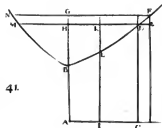


Fig. 41.

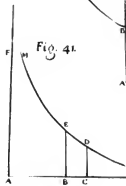


Fig. 43.

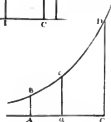


Fig. 44.

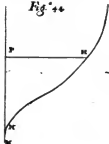
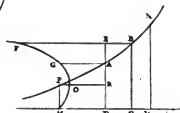


Fig. 45.



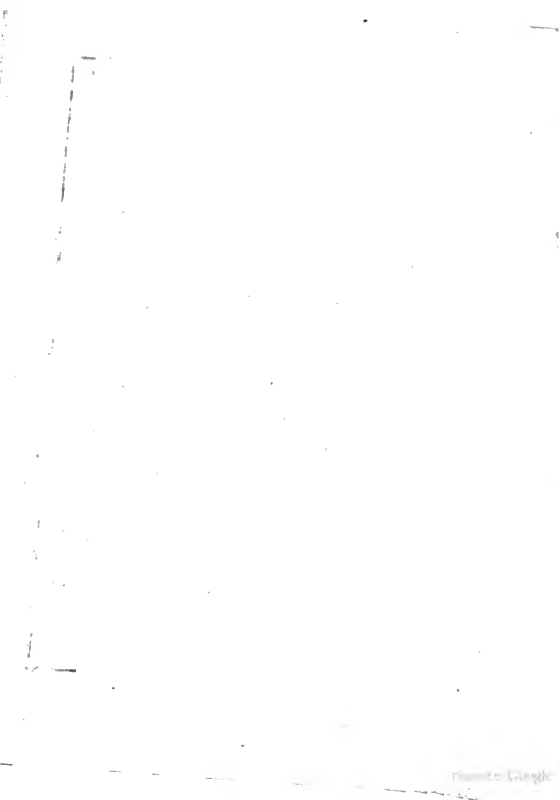


Fig. 1.

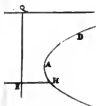


Fig. 2.

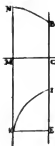


Fig. 3.



Fig. 4.

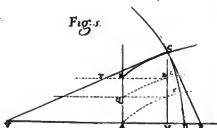
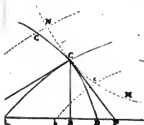


Fig. 6.

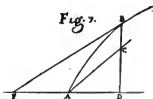


Fig. 7.

